Приведение к каноническому виду линейных уравнений с частными производными второго порядка

11 Уравнение колебаний полубесконечной струны, продолжение решения

11.1. Пусть $u(x,t)$ — решение задачи Коши $u_{tt} = a^2 u_{xx},\ x \in \mathbb{R},\ t > 0;\ u(x,0) = \varphi(x),$ $u_t(x,0) = \psi(x),\ x \in \mathbb{R}$. Используя формулу Даламбера покажите, что
1) если $\varphi(x)$ и $\psi(x)$ — нечетны, то $u(0,t) \equiv 0;$ 2) если $\varphi(x)$ и $\psi(x)$ — четны, то $u_x(0,t) \equiv 0$.

11.2. Пусть $u(x,t)$ — решение задачи Коши $u_{tt} = a^2 u_{xx} + f(x,t),\ x \in \mathbb{R},\ t > 0;\ u(x,0) = \varphi(x),\ u_t(x,0) = \psi(x),\ x \in \mathbb{R}$. Используя формулу Даламбера покажите, что
1) если $\varphi(x)$, $\psi(x)$ нечетны и $f(x,t)$ — нечетна по x, то $u(0,t) \equiv 0;$ 2) если $\varphi(x)$, $\psi(x)$ четны и $f(x,t)$ — четна по x, то $u_x(0,t) \equiv 0$.

Решите следующие задачи Коши.

11.3. $u_{tt} = a^2\, u_{xx},\ x > 0,\ t > 0;\ u(0,t) = 0,\ t > 0;\ u(x,0) = 1 - e^{-x},\ u_t(x,0) = \sin x,$ $x \geqslant 0$.
Ответ: $u(x,t) = \begin{cases} 1 - e^{-x}\operatorname{ch} at + \frac{1}{2a}(\cos(x-at) - \cos(x+at)), & \text{если } x - at > 0, \\ e^{-at}\operatorname{sh} x + \frac{1}{2a}(\cos(x-at) - \cos(x+at)), & \text{если } x - at \leqslant 0. \end{cases}$

11.4. $u_{tt} = a^2\, u_{xx},\ x > 0,\ t > 0;\ u_x(0,t) = 0,\ t > 0;\ u(x,0) = x^2 - x^3,\ u_t(x,0) = \cos x,$ $x \geqslant 0$.
Ответ: $u(x,t) = \frac{1}{2}\big((x+at)^2 - (x+at)^3 + (x-at)^2 - |x-at|^3\big) + \frac{1}{2a}\big(\sin(x+at) - \sin(x-at)\big)$.

Разные задачи на волновое уравнение

11.5. Пусть $u(x,t)$ — решение задачи Коши $u_{tt} = a^2 \Delta u,\ x \in \mathbb{R}^n,\ t > 0;\ u(x,0) = \varphi(x),$ $u_t(x,0) = 0,\ x \in \mathbb{R}^n$. Докажите, что функция $v(x,t) = \int_0^t u(x,\tau)d\tau$ является решением задачи Коши $v_{tt} = a^2 \Delta v,\ x \in \mathbb{R}^n,\ t > 0,\ v(x,0) = 0,\ v_t(x,0) = \varphi(x),\ x \in \mathbb{R}^n$.

11.6. Пусть функция $u(x,t)$ является решением уравнения $u_{tt} = u_{xx}$. Покажите, что функция $v = u\left(\frac{x}{x^2-t^2}, \frac{t}{x^2-t^2}\right)$ также является решением этого уравнения всюду, где она определена.

Для самостоятельного решения

Решите следующие задачи Коши.

11.7. $u_{tt} = 9\, u_{xx},\ x > 0,\ t > 0;\ u(0,t) = 2,\ t > 0;\ u(x,0) = x^2 + x + 2,\ u_t(x,0) = \sin 3x,$ $x \geqslant 0$.

11.8. $u_{tt} = 4\, u_{xx} + 2,\ x > 0,\ t > 0;\ u_x(0,t) = -3,\ t > 0;\ u(x,0) = -3x,\ u_t(x,0) = x^2 \cos 4x,\ x \geqslant 0$.