Приведение к каноническому виду линейных уравнений с частными производными второго порядка

10 Формулы Пуассона и Даламбера

Для решения задачи малых колебаний однородной неограниченной в обе стороны струны при произвольных возмущениях

$$\begin{cases} u_{tt} = a^2 u_{xx} + f(x,t), \quad x \in \mathbb{R}, \ t > 0, \\ u(x,0) = \varphi(x), \ u_t(x,0) = \psi(x), \quad x \in \mathbb{R}, \end{cases}$$

существует *формула Пуассона*

$$u(x,t) = \frac{1}{2}[\varphi(x+at) + \varphi(x-at)] + \frac{1}{2a}\int\limits_{x-at}^{x+at} \psi(s)ds + \frac{1}{2a}\int\limits_0^t \int\limits_{x-a(t-\tau)}^{x+a(t-\tau)} f(s,\tau)ds\,d\tau.$$

В частном случае, при $f \equiv 0$, формула Пуассона преобразуется в *формулу Даламбера*

$$u(x,t) = \tfrac{1}{2}(\varphi(x+a\,t) + \varphi(x-a\,t)) + \tfrac{1}{2\,a}\int_{x-a\,t}^{x+a\,t} \psi(s)\,ds.$$

10.1. Докажите формулу Даламбера.

Решите следующие задачи Коши:

10.2. $u_{tt} = u_{xx} + \sin x, \ x \in \mathbb{R}, \ t > 0; \ u(x,0) = \sin x, \ u_t(x,0) = 0, \ x \in \mathbb{R}.$
Ответ: $u(x,t) = \sin x.$

10.3. $u_{tt} = u_{xx} + 6, \ x \in \mathbb{R}, \ t > 0; \ u(x,0) = x^2, \ u_t(x,0) = 4x, \ x \in \mathbb{R}.$
Ответ: $u(x,t) = (x+2t)^2.$

10.4. $u_{tt} = u_{xx} + x\,t, \ x \in \mathbb{R}, \ t > 0; \ u(x,0) = \cos x, \ u_t(x,0) = x^2 + x, \ x \in \mathbb{R}.$
Ответ: $u(x,t) = \cos x \cos t + x^2 t + \frac{1}{3}\,t^3 + x\,t + \frac{1}{6}\,x\,t^3.$

10.5. $u_{tt} = u_{xx} + 2\,x^2, \ x \in \mathbb{R}, \ t > 0; \ u(x,0) = e^{-x}, \ u_t(x,0) = 2, \ x \in \mathbb{R}.$
Ответ: $u(x,t) = 2\,t + x^2\,t^2 + \frac{1}{6}t^4 + e^{-x}\,\mathrm{ch}\,t.$

10.6. $u_{tt} = u_{xx} + g(x)\,f(t), \ x \in \mathbb{R}, \ t > 0; \ u(x,0) = 0, \ u_t(x,0) = 0, \ x \in \mathbb{R}$, где функция g такова, что $g^{(2m)}(x) \equiv 0.$
Ответ: $u(x,t) = \sum\limits_{k=0}^{m-1} \frac{1}{(2\,k+1)!}\,g^{(2k)}(x)\int_0^t (t-\tau)^{2\,k+1}\,f(\tau)\,d\tau.$

Для самостоятельного решения

Решите следующие задачи Коши.

10.7. $u_{tt} = 9\,u_{xx} + \sin x, \ x \in \mathbb{R}, \ t > 0; \ u(x,0) = 1, \ u_t(x,0) = 1, \ x \in \mathbb{R}.$
Ответ: $u(x,t) = 1 + t + \frac{1}{9}\,(1 - \cos 3t)\sin x.$

10.8. $u_{tt} = a^2 u_{xx} + \sin \omega t, \ x \in \mathbb{R}, \ t > 0; \ u(x,0) = 0, \ u_t(x,0) = 0, \ x \in \mathbb{R}.$
Ответ: $u(x,t) = \frac{t}{\omega} - \frac{1}{\omega^2}\sin \omega t.$

10.9. $u_{tt} = u_{xx} + e^x, \ x \in \mathbb{R}, \ t > 0; \ u(x,0) = \sin x, \ u_t(x,0) = x + \cos x, \ x \in \mathbb{R}.$
Ответ: $u(x,t) = x\,t + \sin(x+t) - (1 - \mathrm{ch}\,t)e^x.$