Приведение к каноническому виду линейных уравнений с частными производными второго порядка

8 Задача Коши на плоскости для уравнений гиперболического типа

Решите следующие задачи Коши в $\mathbb{R}^2$.

8.1. $4y^2u_{xx} + 2(1-y^2)u_{xy} - u_{yy} - \frac{2y}{1+y^2}(2u_x - u_y) = 0, \quad u(x,0) = \varphi(x), \quad u_y(x,0) = \psi(x).$
Ответ: $u = \varphi(x - \frac{2}{3}y^3) + \frac{1}{2}\int\limits_{x-\frac{2}{3}y^3}^{x+2y} \psi(s)ds.$

8.2. $u_{xx} - 2u_{xy} + 4e^y = 0, \quad u(0,y) = \varphi(y), \quad u_x(0,y) = \psi(y).$
Ответ: $u = (1 + 2x - e^{2x})e^y + \varphi(y) + \frac{1}{2}\int\limits_{y}^{2x+y} \psi(s)ds.$

8.3. $u_{xx} + 2\cos x u_{xy} - \sin^2 x u_{yy} - \sin x u_y = 0, \; u(x, \sin x) = x + \cos x, \; u_y(x, \sin x) = \sin x.$
Ответ: $u = x + \cos(x - y + \sin x).$

8.4. $e^y u_{xy} - u_{yy} + u_y = xe^{2y}, \quad u(x,0) = \sin x, \quad u_y(x,0) = \frac{1}{1+x^2}.$
Ответ: $u = \frac{1}{2}x^2(e^y - 1) + \sin x + \frac{1}{6}(x^3 - (x - e^y - 1)^3) + \operatorname{arctg}(x + e^y - 1) - \operatorname{arctg} x.$

Для самостоятельного решения

8.5. $u_{xx} + 2\cos x u_{xy} - \sin^2 x u_{yy} + u_x + (1 - \sin x + \cos x)u_y = 0, \quad u(x, \sin x) = \cos x,$ $u_y(x, \sin x) = \sin x.$
Ответ: $u = \cos(y - x - \sin x).$

8.6. $2u_x - u_y - 4u = e^{x+y}, \quad u(x,0) = \varphi(x).$
Ответ: $u = e^{x-2y}\left(e^{-(x+2y)}\varphi(x+2y) - \frac{1}{3}e^{3y} + \frac{1}{3}\right).$