Приведение к каноническому виду линейных уравнений с частными производными второго порядка

7 Поиск общего решения уравнений гиперболического типа

Найдите общее решение следующих уравнений.

7.1. $2u_{xx} - 5u_{xy} + 3u_{yy} = 0.$
Ответ: $u = f(x+y) + g(3x+2y).$

7.2. $u_{xy} + xu_x - u + \cos y = 0$ (указание: сделайте замену $v = u_{xx}$).
Ответ: $u = \cos y + xg(y) + g'(y) + \int\limits_0^x (x-s)e^{-ys} f(s)ds.$

7.3. $\operatorname{ch} x\, u_{xy} + (\operatorname{sh} x + y \operatorname{ch} x)u_y - \operatorname{ch} x\, u = 0$ (указание: сделайте замену $v = u_{yy} \operatorname{ch} x$).
Ответ: $u = \frac{1}{\operatorname{ch} x}\left(yg(x) + g'(x) + \int\limits_0^y (y-s)e^{-sx} f(s)ds\right).$

Для самостоятельного решения

7.4. Найдите общее решение уравнения $\frac{\partial}{\partial y}(u_x + u) + 2x^2 y(u_x + u) = 0.$
Ответ: $u = e^{-x}\left(f(y) + \int\limits_0^x e^{s - s^2 y^2} g(s)ds\right).$

Решите следующие задачи Коши в $\mathbb{R}^2$.

7.5. $e^y u_{xy} - u_{yy} + u_y = 0, \quad u(0,y) = -x^2/2, \quad u_y(x,0) = -\sin x.$
Ответ: $u = -\frac{x^2}{2} + \cos(x - 1 + e^y) - \cos x.$

7.6. $3u_{xx} - 5u_{xy} + 2u_{yy} = 0, \quad u(x,x) = \frac{x}{1+x^2} \quad u_y(x,x) = \cos x.$
Ответ: $u = \frac{12(x+y)}{4+(x+y)^2} + 10\cos\frac{x+y}{2} - \frac{25(2x+3y)}{25+(2x+3y)^2} - 10\cos\frac{2x+3y}{5}.$