Приведение к каноническому виду линейных уравнений с частными производными второго порядка

6 Уравнения с постоянными коэффициентами

6.1. Докажите, что любое уравнение вида $u_{xy} + au_x + bu_y + cu = 0$, $a, b, c \in \mathbb{R}$, путем замены $u = ve^{\alpha x + \beta y}$, $\alpha, \beta \in \mathbb{R}$, $v = v(x, y)$, можно привести к виду $v_{xy} + qv = 0$, $q \in \mathbb{R}$.

Преобразуйте к каноническому виду и избавьтесь от производных первого порядка.

6.2. $u_{xx} - 6u_{xy} + 9u_{yy} - u_x + 2u_y = 0$.
Ответ: $\xi = 3x + y$, $\eta = x$, $\quad v_{\eta\eta} - v_\xi = 0$, где $u(\xi, \eta) = e^{-\frac{1}{4}\xi + \frac{1}{4}\eta} v(\xi, \eta)$.

6.3. $u_{xx} - u_{yy} + u_x + u_y - 4u = 0$.
Ответ: $\xi = x - y$, $\eta = x + y$, $\quad v_{\xi\eta} - v = 0$, где $u(\xi, \eta) = e^{-\frac{1}{2}\xi} v(\xi, \eta)$.

Рассмотрим уравнение

$$a_{11}u_{xx} + a_{22}u_{yy} + a_{33}u_{zz} + 2a_{12}u_{xy} + 2a_{13}u_{xz} + 2a_{23}u_{yz} + a_1u_x + a_2u_y + a_3u_z + au = 0. \qquad (1)$$

Для того, чтобы привести уравнение (1) к каноническому виду, необходимо проделать следующие операции.

1. Выделяя полные квадраты методом Лагранжа, преобразовать квадратичную форму

$$F(\lambda) = \lambda^T A\lambda = a_{11}\lambda_1^2 + a_{22}\lambda_2^2 + a_{33}\lambda_3^2 + 2a_{12}\lambda_1\lambda_2 + 2a_{13}\lambda_1\lambda_3 + 2a_{23}\lambda_2\lambda_3$$

к виду

$$F(\lambda) = b_{11}(m_{11}\lambda_1 + m_{12}\lambda_2 + m_{13}\lambda_3)^2 + b_{22}(m_{21}\lambda_1 + m_{22}\lambda_2 + m_{23}\lambda_3)^2 + b_{33}(m_{31}\lambda_1 + m_{32}\lambda_2 + m_{33}\lambda_3)^2,$$

где $b_{11}, b_{22}, b_{33} \in \{-1, 0, 1\}$.

2. Составить из коэффициентов m_{ij} матрицу M и вычислить матрицу $C = (M^{-1})^T$.

3. Замена переменных $\begin{bmatrix} \xi \\ \eta \\ \zeta \end{bmatrix} = C \begin{bmatrix} x \\ y \\ z \end{bmatrix}$ приведет уравнение (1) к канонической форме

$$b_{11}u_{\xi\xi} + b_{22}u_{\eta\eta} + b_{33}u_{\zeta\zeta} + b_1u_\xi + b_2u_\eta + b_3u_\zeta + bu = 0.$$

Уравнение называется:
1) *эллиптическим*, если b_{11}, b_{22}, b_{33} — отличны от нуля и одного знака;
2) *гиперболическим*, если b_{11}, b_{22}, b_{33} — отличны от нуля и разных знаков;
3) *параболическим*, если один из коэффициентов b_{11}, b_{22}, b_{33} равен нулю, а остальные одного знака.

Обоснуем приведенный алгоритм. Пусть $B = \begin{bmatrix} b_{11} & 0 & 0 \\ 0 & b_{22} & 0 \\ 0 & 0 & b_{33} \end{bmatrix}$ и $G(\mu) = \mu^T B\mu$, тогда $G(M\lambda) = \lambda^T M^T BM\lambda = F(\lambda)$ и, следовательно, $A = M^T BM$. Рассмотрим дифференциальный оператор квадратичной части уравнения (1)

$$L = a_{11}\tfrac{\partial^2}{\partial x^2} + a_{22}\tfrac{\partial^2}{\partial y^2} + a_{33}\tfrac{\partial^2}{\partial z^2} + 2a_{12}\tfrac{\partial^2}{\partial x\partial y} + 2a_{13}\tfrac{\partial^2}{\partial x\partial z} + 2a_{23}\tfrac{\partial^2}{\partial y\partial z} = (\tfrac{\partial}{\partial x}, \tfrac{\partial}{\partial y}, \tfrac{\partial}{\partial z})A \begin{bmatrix} \frac{\partial}{\partial x} \\ \frac{\partial}{\partial y} \\ \frac{\partial}{\partial z} \end{bmatrix}.$$

Если $\begin{bmatrix} \xi \\ \eta \\ \zeta \end{bmatrix} = C \begin{bmatrix} x \\ y \\ z \end{bmatrix}$, то $\begin{bmatrix} \frac{\partial}{\partial x} \\ \frac{\partial}{\partial y} \\ \frac{\partial}{\partial z} \end{bmatrix} = C^T \begin{bmatrix} \frac{\partial}{\partial \xi} \\ \frac{\partial}{\partial \eta} \\ \frac{\partial}{\partial \zeta} \end{bmatrix}$. Значит,

$$L = (\frac{\partial}{\partial \xi}, \frac{\partial}{\partial \eta}, \frac{\partial}{\partial \zeta})\, C\, A\, C^T \begin{bmatrix} \frac{\partial}{\partial \xi} \\ \frac{\partial}{\partial \eta} \\ \frac{\partial}{\partial \zeta} \end{bmatrix}.$$

Выбрав матрицу C в виде $C = (M^{-1})^T$, мы получим, что матрица $CAC^T = (M^{-1})^T A M^{-1} = B$ будет матрицей оператора L в переменных ξ, η, ζ. А это, в свою очередь, означает, что оператор L приобретет канонический вид.

Преобразуйте к каноническому виду уравнения.

6.4. $u_{xx} + 4u_{yy} + u_{zz} + 4u_{xy} + 2u_{xz} + 4u_{yz} + 2u = 0.$
Ответ: $u_{\xi\xi} + 2u = 0.$

6.5. $u_{xy} + u_{zz} + u_x - u_y = 0.$
Ответ: $u_{\xi\xi} - u_{\eta\eta} + u_{\zeta\zeta} + 2u_{\xi} = 0.$

Для самостоятельного решения

Приведите к каноническому виду и упростите при помощи экспоненциальной замены следующие уравнения.

6.6. $u_{xy} - u_{xz} - u_x + u_y + u_z + u = 0.$
Ответ: $\xi = x + y$, $\eta = -x + y$, $\zeta = y + z$, $\quad u_{\xi\xi} - u_{\eta\eta} + 2u_{\eta} + 2u_{\zeta} + u = 0,$
$u = ve^{\eta-\zeta}, \quad v_{\xi\xi} - v_{\eta\eta} + 2v_{\zeta} = 0.$

6.7. $u_{yy} - 2u_{xy} + u_{zz} + u_x + u_y + u_z + u = 0.$
Ответ: $\xi = y$, $\eta = x + y$, $\zeta = z$, $\quad u_{\xi\xi} - u_{\eta\eta} + u_{\zeta\zeta} + u_{\xi} + 2u_{\eta} + u_{\zeta} + u = 0$, $u = ve^{-\frac{1}{2}\xi+\eta-\frac{1}{2}\zeta}$,
$v_{\xi\xi} - v_{\eta\eta} + v_{\zeta\zeta} + \frac{3}{2}v = 0.$