Приведение к каноническому виду линейных уравнений с частными производными второго порядка

5 Уравнения с двумя независимыми переменными

Рассмотрим уравнение

$$a_{11}u_{xx} + 2a_{12}u_{xy} + a_{22}u_{yy} + b_1u_x + b_2u_y + cu + f = 0. \qquad (1)$$

Всякая взаимнооднозначная замена переменных $\xi = \xi(x, y)$, $\eta = \eta(x, y)$ приводит к новому уравнению, которое эквивалентно (1). Как же выбрать ξ и η так, чтобы в этих переменных уравнение имело наиболее простую форму? Для того, чтобы после замены часть коэффициентов обратилась в ноль, необходимо найти характеристики уравнения (1) (характеристики — это такая координатная сетка на плоскости (x, y), в которой уравнение (1) приобретает канонический вид). Характеристиками уравнения (1) являются первые интегралы уравнения

$$a_{11}dy^2 - 2a_{12}dxdy + a_{22}dx^2 = 0. \qquad (2)$$

В зависимости от знака дискриминанта $\Delta = a_{12}^2 - a_{11}a_{22}$ различают три случая:

1) Гиперболический ($\Delta > 0$). Уравнение (2) распадается на два ОДУ $\frac{dy}{dx} = \frac{a_{12}\pm\sqrt{\Delta}}{a_{11}}$ (не ограничивая общности считаем, что $a_{11} \neq 0$, в противном случае рассматривают уравнения $\frac{dx}{dy} = \frac{a_{12}\pm\sqrt{\Delta}}{a_{22}}$). Из этих уравнений находим интегралы $f_1(x, y) = C_1$, $f_2(x, y) = C_2$. Замена переменных $\xi = f_1(x, y)$, $\eta = f_2(x, y)$ преобразует уравнение (1) к виду $u_{\xi\eta} = -\frac{\bar{F}}{a_{12}}$, правая часть которого не содержит вторых производных функции u.

2) Параболический ($\Delta = 0$). Уравнение (2) эквивалентно уравнению $\frac{dy}{dx} = \frac{a_{12}}{a_{11}}$, интегрируя которое находим $f(x, y) = C$. Замена переменных $\xi = f(x, y)$, $\eta = g(x, y)$ (где g — произвольная функция, линейно независимая с f) преобразует уравнение (1) к виду $u_{\eta\eta} = -\frac{\bar{F}}{a_{22}}$, правая часть которого не содержит вторых производных функции u.

3) Эллиптический ($\Delta < 0$). Уравнение (2) распадается на уравнения $\frac{dy}{dx} = \frac{a_{12}\pm i\sqrt{|\Delta|}}{a_{11}}$, решая которые находим интегралы $f(x, y) \pm ig(x, y) = C_1 \pm iC_2$. После замены $\xi = f(x, y)$, $\eta = g(x, y)$ уравнение (1) примет вид $\tilde{a}_{11}u_{\xi\xi} + \tilde{a}_{22}u_{\eta\eta} = -\bar{F}$, $\tilde{a}_{11}\tilde{a}_{22} > 0$, правая часть которого не содержит вторых производных функции u.

Заметим, что одно и то же уравнение может иметь разный тип в разных частях плоскости.

Также отметим, что замена переменных $\xi = \xi(x, y)$, $\eta = \eta(x, y)$ взаимнооднозначна, если ее якобиан $\frac{d(\xi,\eta)}{d(x,y)} = \begin{vmatrix} \xi_x & \xi_y \\ \eta_x & \eta_y \end{vmatrix}$ непрерывен и отличен от нуля для всех (x, y).

Преобразуйте к каноническому виду следующие уравнения.

5.1. $u_{xx} - 2u_{xy} + u_{yy} + 9u_x + 9u_y - 9u = 0.$
Ответ: $\xi = x + y$, $\eta = x$, $\quad u_{\eta\eta} + 18u_\xi + 9u_\eta - 9u = 0$ (параболическое всюду).

5.2. $2u_{xx} + 3u_{xy} + u_{yy} + 7u_x + 4u_y - 2u = 0.$
Ответ: $\xi = y - x$, $\eta = 2y - x$, $\quad u_{\xi\eta} + 3u_\xi - u_\eta + 2u = 0$ (гиперболическое всюду).

5.3. $u_{xx} + 4u_{xy} + 13u_{yy} + 3u_x + 24u_y - 9u + 9(x + y) = 0.$
Ответ: $\xi = y - 2x$, $\eta = 3x$, $\quad u_{\xi\xi} + u_{\eta\eta} + 2u_\xi + u_\eta - u + \xi + \eta = 0$ (эллиптическое всюду).

5.4. $(1 + x^2)^2u_{xx} + u_{yy} + 2x(1 + x^2)u_x = 0.$
Ответ: $\xi = y$, $\eta = \operatorname{arctg} x$, $\quad u_{\xi\xi} + u_{\eta\eta} = 0$ (эллиптическое всюду).

5.5. $u_{xx} - (1 + y^2)^2u_{yy} - 2y(1 + y^2)u_y = 0.$
Ответ: $\xi = \operatorname{arctg} y - x$, $\eta = \operatorname{arctg} y + x$, $\quad u_{\xi\eta} = 0$ (гиперболическое всюду).

Для самостоятельного решения

5.6. $u_{xx} + u_{xy} - 2u_{yy} - 3u_x - 15u_y + 27x = 0$.
Ответ: $\xi = 2x - y$, $\eta = x + y$, $\quad u_{\xi\eta} + u_\xi - 2u_\eta + \xi + \eta = 0$ (гиперболическое всюду).

5.7. $u_{xx} + 4u_{xy} + 10u_{yy} - 24u_x + 42u_y + 2(x + y) = 0$.
Ответ: $\xi = y - 2x$, $\eta = x$, $\quad 6u_{\xi\xi} + u_{\eta\eta} + 90u_\xi - 24u_\eta + 2\xi + 6\eta = 0$ (эллиптическое всюду).

5.8. $y^2u_{xx} + 2xyu_{xy} + x^2u_{yy} = 0$.
Ответ: $\xi = y^2 - x^2$, $\eta = x^2$, $\quad u_{\eta\eta} - \frac{\xi}{2\eta(\xi+\eta)}u_\xi + \frac{1}{2\eta}u_\eta = 0$ (параболическое всюду, кроме точки $(0, 0)$, в которой уравнение вырождается).