4 Поток вектора. Формула Остроградского

Потоком векторного поля $A = (A_1, A_2, A_3)$ через поверхность S называется число

$$\iint_S A(x, y, z) \cdot n(x, y, z)\, dS = \iint_S A \cdot n\, dS,$$

где $n(x, y, z)$ — это нормаль к поверхности S в точке $(x, y, z) \in S$.

4.1. Найдите поток поля $A(x, y, z) = (x, 2y, 3z)$ через поверхность S, которая задана отображением $s(\xi, \eta) = (\xi, \xi^2, \eta^2)$, $(\xi, \eta) \in [0; 1]^2$.

4.2. Найдите поток вектора (x, y, z) через полусферу S: $x^2 + y^2 + z^2 = a^2$, $z \geqslant 0$.

Пусть Ω — это область в $\mathbb{R}^3$, ограниченная кусочно гладкой поверхностью S, $A \in \mathrm{C}^1(\overline{\Omega}, \mathbb{R}^3)$ — это непрерывно дифференцируемое векторное поле. Тогда справедлива формула *Гаусса-Остроградского*

$$\iint_S A \cdot n\, dS = \iiint_\Omega \mathrm{div} A\, dv,$$

где n — это вектор внешней нормали к поверхности S, $\mathrm{div} A(x) \equiv \nabla \cdot A(x) = \frac{\partial A_1}{\partial x_1}(x) + \cdots + \frac{\partial A_n}{\partial x_n}(x)$.

4.3. Преобразуйте интеграл $\iint_S (x^3, y^3, z^3) \cdot n(x, y, z)\, dS$, где кусочно гладкая поверхность S ограничивает объем Ω, $n(x, y, z)$ — вектор внешней нормали к S в точке $(x, y, z) \in S$.

4.4. Вычислите интеграл $\iint_S n\, dS$, где кусочно гладкая поверхность S ограничивает объем Ω. Чему равен интеграл $\iint_S a \cdot n\, dS$, если $a = (a_1, a_2, a_3) = \mathrm{const}$?

4.5. Докажите, что объем тела Ω равен потоку вектора $A = (\frac{1}{3}x, \frac{1}{3}y, \frac{1}{3}z)$ через поверхность этого тела.

4.6. Найдите поток вектора (x^2, y^2, z^2) через поверхность куба $[0; a]^3$.

4.7. Найдите поток вектора (x^2, y^2, z^2) через часть поверхности конуса $S = \{z^2 = x^2 + y^2,\ 0 \leqslant z \leqslant h\}$.

4.8. Пусть объем Ω ограничен кусочно гладкой поверхностью S. Докажите, что

$$\iint_S \cos(r, n)\, dS = 2 \iiint_\Omega \frac{1}{|r|} dv,$$

где $r = (x, y, z)$, n — вектор внешней нормали к S. Как изменится формула, если вместо вектора r рассмотреть вектор $\rho = (x - a, y - b, z - c)$.

4.9. Пусть объем Ω ограничен кусочно гладкой поверхностью S, $u \in \mathrm{C}^2(\overline{\Omega})$. Докажите, что

$$\iint_S \frac{\partial u}{\partial n}\, dS = \iiint_V \Delta u dv,$$

$$\iint_S u \frac{\partial u}{\partial n}\, dS = \iiint_V ((\nabla u)^2 + u \Delta u)\, dv.$$

Как будут выглядеть эти формулы, если функция u гармоническая, то есть $\Delta u = 0$ в Ω.

Для самостоятельного решения

4.10. Пусть объем Ω ограничен кусочно гладкой поверхностью S. Вычислите *интеграл Гаусса*

$$\iint_S \frac{\cos(r,n)}{r^2}\,dS,$$

где $r = (x, y, z)$, n — вектор внешней нормали к S. Как изменится формула, если вместо вектора r рассмотреть вектор $\rho = (x - a, y - b, z - c)$.

4.11. Пусть объем Ω ограничен кусочно гладкой поверхностью S, $u,\ v \in \mathrm{C}^2(\overline{\Omega})$. Докажите *вторую формулу Грина*

$$\iiint_\Omega \begin{vmatrix} \Delta u & \Delta v \\ u & v \end{vmatrix}\,dv = \iint_S \begin{vmatrix} \frac{\partial u}{\partial n} & \frac{\partial v}{\partial n} \\ u & v \end{vmatrix}\,dS,$$

где n — вектор внешней нормали к S.

4.12. Пусть Ω — область в $\mathbb{R}^3$, $A \in \mathrm{C}^1(\Omega)$ — непрерывное векторное поле. Докажите, что для всех $M \in \Omega$ справедлива формула

$$\mathrm{div}A(M) = \lim_{d(V)\to 0} \frac{1}{V} \iint_S A \cdot n\,dS,$$

где S — кусочно гладкая поверхность, ограничивающая объем V такой, что $M \in V \subset \Omega$, $d(V)$ — диаметр объема V.