3 Нормаль к поверхности и интеграл по поверхности

3.1. Поверхность S задана уравнением $x^2+y^2+z^2 = 169$. Напишите формулу для вектора нормали $n(M)$ в каждой точке $M = (x, y, z) \in S$. Напишите уравнение касательной плоскости в точке $M(3, 4, 12)$.

3.2. Поверхность S задана уравнением $x^2 + y^3 + z^4 = 169$. Напишите формулу для вектора нормали $n(M)$ в каждой точке $M = (x, y, z) \in S$.

3.3. Поверхность S ограничивает параллелепипед $[0; 1] \times [2; 3] \times [4; 6]$. Напишите формулу для вектора нормали $n(M)$ в каждой точке $M = (x, y, z) \in S$.

3.4. Поверхность S задана функцией $s(\xi, \eta) = (\xi, \xi^2 + \eta, \xi + \eta^2)$, $(\xi, \eta) \in \mathbb{R}^2$. Напишите формулу для вектора нормали $n(M)$ в каждой точке $M = (x, y, z) \in S$.

3.5. Поверхность S задана функцией $s(\varphi, \psi) = ((2 + \cos\psi)\cos\varphi, (2 + \cos\psi)\sin\varphi, \sin\psi)$, $(\varphi, \psi) \in [0; 2\pi)^2$. Напишите формулу для вектора нормали $n(M)$ в каждой точке $M = s(\varphi, \psi) \in S$.

3.6. Пусть поверхность S ограничивает область $\Omega = \{x^2 + y^2 \leqslant z \leqslant 1\}$. Вычислите $\frac{\partial f}{\partial n}$, где $f = x + y^2 + xz$, а n — вектор внешней нормали к поверхности S, во всех точках поверхности S.

Пусть гладкая поверхность $S \subset \mathbb{R}^n$ задана отображением $s = (s_1(\xi, \eta), s_2(\xi, \eta), s_3(\xi, \eta)) \in \mathrm{C}^1(D, S)$. *Интегралом по поверхности* S от функции $f = f(x, y, z)$ называется число

$$\iint_S f(x, y, z)dS = \iint_D f(s_1(\xi, \eta), s_2(\xi, \eta), s_3(\xi, \eta))\sqrt{EG - F^2}\, d\xi\, d\eta,$$

$$\begin{aligned} E &= \frac{\partial s}{\partial \xi} \cdot \frac{\partial s}{\partial \xi} = \left(\frac{\partial s_1}{\partial \xi}\right)^2 + \left(\frac{\partial s_2}{\partial \xi}\right)^2 + \left(\frac{\partial s_3}{\partial \xi}\right)^2, \\ G &= \frac{\partial s}{\partial \eta} \cdot \frac{\partial s}{\partial \eta} = \left(\frac{\partial s_1}{\partial \eta}\right)^2 + \left(\frac{\partial s_2}{\partial \eta}\right)^2 + \left(\frac{\partial s_3}{\partial \eta}\right)^2, \\ F &= \frac{\partial s}{\partial \xi} \cdot \frac{\partial s}{\partial \eta} = \frac{\partial s_1}{\partial \xi}\frac{\partial s_1}{\partial \eta} + \frac{\partial s_2}{\partial \xi}\frac{\partial s_2}{\partial \eta} + \frac{\partial s_3}{\partial \xi}\frac{\partial s_3}{\partial \eta}. \end{aligned}$$

Интеграл по поверхности существует, если $g(\xi, \eta) = f(s(\xi, \eta))\sqrt{EG - F^2} \in \mathrm{L}(D)$.

3.7. Вычислите интеграл $\iint_S x dS$, если поверхность S задана функцией $s(\xi, \eta) = (\xi, \xi^2 + \eta, \xi + \eta^2)$, $(\xi, \eta) \in [0; 1]^2$.

3.8. Напишите формулу для вычисления интеграла $\iint_S f(x, y, z)dS$, если поверхность S задана функцией $z = z(x, y)$, $(x, y) \in \Omega$.

3.9. Вычислите $\iint_S \frac{dS}{(1+x+y)^2}$ где S это треугольник ABC с координатами вершит $A(1, 0, 0)$, $B(0, 1, 0)$, $C(0, 0, 1)$.

3.10. Найдите массу полусферы S: $x^2 + y^2 + z^2 = a^2$, $z \geqslant 0$, поверхностная плотность которой в каждой точке $M(x, y, z)$ равна z/a.

3.11. Найдите центр тяжести однородной полусферы S: $x^2 + y^2 + z^2 = a^2$, $z \geqslant 0$.

Для самостоятельного решения

3.12. Докажите формулу Пуассона

$$\iint_S f(ax+by+cz)\,dS = 2\pi\int_{-1}^{1} f(u\sqrt{a^2+b^2+c^2})\,du,$$

где S — поверхность сферы $x^2+y^2+z^2=1$, $a=\mathrm{const}$, $b=\mathrm{const}$, $c=\mathrm{const}$.

3.13. Найдите массу поверхности $S=\{2z=x^2+y^2,\ 0\leqslant z\leqslant 1\}$ поверхностная плотность которой $\rho(x,y,z)=z$.

3.14. Вычислите интеграл $\iint_S(x^2+y^2)dS$, где S — граница области $\Omega=\{x^2+y^2\leqslant z^2\leqslant 1\}$.