2 Замена переменных

2.1. Решите уравнение $z_y - z_x = 0$, перейдя к новым независимым переменным $u = x + y$, $v = x - y$.

2.2. Введя новые независимые переменные u и v, решите дифференциальное уравнение: $xz_x + yz_y = z$, если $u = x$, $v = \dfrac{y}{x}$.

2.3. Решите уравнение с частными производными, введя новые независимые переменные u и v: $yz_x - xz_y = 0$, если $u = x$, $v = x^2 + y^2$.

2.4. В уравнении $\dfrac{\partial u}{\partial x} + \dfrac{\partial u}{\partial y} + \dfrac{\partial u}{\partial z} = 0$ сделайте замену $t = x$, $s = y - x$, $p = z - x$.

2.5. Введя новые независимые переменные, преобразуйте выражение $B = (z_x)^2 + (z_y)^2$, если $x = r\cos\varphi$, $y = r\sin\varphi$.

2.6. Решите дифференциальное уравнение, введя новые переменные u, v и w, где $w = w(u, v)$: $xz_x + (y + 1)z_y = 0$, если $x = u + v$, $y = \dfrac{v}{u}$, $z = \dfrac{w}{u}$.

2.7. Докажите, что любое уравнение $z_{xy} + az_x + bz_y + cz = 0$, $a, b, c \in \mathbb{R}$, путем замены $z = ue^{\alpha x + \beta y}$, $\alpha, \beta \in \mathbb{R}$, $u = u(x, y)$, можно привести к виду $u_{xy} + qu = 0$, $q \in \mathbb{R}$.

Пусть уравнение $F(x, y, z) = 0$ неявно задаёт поверхность, на которой лежит точка $M_\circ = (x_\circ, y_\circ, z_\circ)$. Тогда $F_x(M_\circ)(x_\circ - x) + F_y(M_\circ)(y_\circ - y) + F_z(M_\circ)(z_\circ - z) = 0$ — уравнение касательной плоскости в точке $M_\circ$, а $\dfrac{x_\circ - x}{F_x(M_\circ)} = \dfrac{y_\circ - y}{F_y(M_\circ)} = \dfrac{z_\circ - z}{F_z(M_\circ)}$ — уравнение нормали к поверхности в точке $M_\circ$.

2.8. Напишите уравнения касательной плоскости и нормали к поверхности $x^2 + y^2 + z^2 = 169$ в точке $M(3, 4, 12)$.

Для самостоятельного решения

2.9. Введя новые независимые переменные u и v, преобразуйте дифференциальное уравнение: $yz_x - xz_y = ye^{x^2+y^2}$, если $u = x^2 + y^2$, $v = y$.
Ответ: $z_v = \pm\dfrac{v}{\sqrt{u - v^2}}e^u$.

2.10. Решите уравнение с частными производными, введя новые независимые переменные u и v: $az_x + bz_y = 0$, если $u = ax + by$, $v = bx - ay$.
Ответ: $z_u = 0$, $z = f(bx - ay)$, где $f(v)$ — произвольная дифференцируемая функция.

2.11. Введя новые независимые переменные, преобразуйте выражение: $B = z_{xx} + z_{yy}$, если $x = r\cos\varphi$, $y = r\sin\varphi$.
Ответ: $B = z_{rr} + \dfrac{1}{r}z_r + \dfrac{1}{r^2}z_\varphi\varphi$.