1 Вводный семинар

1.1. Найдите частные производные функции $u(x,y) = x^y$.

Пусть $u = u(x_1,\dots,x_n)$. Тогда дифференциальный оператор $\Delta u = \dfrac{\partial^2 u}{\partial x_1^2} + \dots + \dfrac{\partial^2 u}{\partial x_n^2}$ называется *оператором Лапласа*. В частности, если $u = u(x,y)$, то $\Delta u = \dfrac{\partial^2 u}{\partial x^2} + \dfrac{\partial^2 u}{\partial y^2}$.

1.2. Найдите Δu, если а) $u = \sin x \operatorname{ch} y$; б) $u = \ln\sqrt{x^2+y^2}$.

Дифференцирование сложной функции. Пусть $u(x,y) = f(\xi(x,y),\eta(x,y))$. Тогда

$$\frac{\partial u}{\partial x}(x,y) = \frac{\partial f}{\partial \xi}(\xi(x,y),\eta(x,y))\cdot\frac{\partial \xi}{\partial x}(x,y) + \frac{\partial f}{\partial \eta}(\xi(x,y),\eta(x,y))\cdot\frac{\partial \eta}{\partial x}(x,y).$$

Или в сокращенной записи

$$\frac{\partial u}{\partial x} = \frac{\partial f}{\partial \xi}\cdot\frac{\partial \xi}{\partial x} + \frac{\partial f}{\partial \eta}\cdot\frac{\partial \eta}{\partial x}.$$

Заметим, что число переменных функции f не обязано совпадать с числом переменных функции u. Аналогично можно записать формулы для частных производных функций $u(x,y) = f(\xi(x,y))$, $u(x) = f(\xi(x),\eta(x))$ и т.д.

1.3. Найдите частные производные по x и по y функций а) $u = f(x+y, x^2+y^2)$; б) $u = f(x-y, xy)$.

1.4. Найдите частные производные функции $u = f(x, xy, xyz)$ по x, y и z.

1.5. Проверьте, что функция $u = f(x^2+y^2)$, где $f(\xi)$ — произвольная дифференцируемая функция, удовлетворяет уравнению $y\dfrac{\partial u}{\partial x} - x\dfrac{\partial u}{\partial y} = 0$.

1.6. Проверьте, что функция $u = \dfrac{y^2}{3x} + f(xy)$, где $f(\xi)$ — произвольная дифференцируемая функция, удовлетворяет уравнению $x^2\dfrac{\partial u}{\partial x} - xy\dfrac{\partial u}{\partial y} + y^2 = 0$.

1.7. Найдите решение $u(x,y)$ уравнения $\dfrac{\partial u}{\partial x} = \cos x + xy$, удовлетворяющее условию $u(0,y) = y^2$.

1.8. Решите уравнения а) $\dfrac{\partial^2 z}{\partial x^2} = 0, \quad z = z(x,y)$; б) $\dfrac{\partial^3 u}{\partial x \partial y \partial z} = 0, \quad u = u(x,y,z)$.

1.9. Проверьте, что функция $u = f(x-at) + g(x+at)$, где f и g — произвольные дважды дифференцируемые функции, удовлетворяет уравнению $\dfrac{\partial^2 u}{\partial t^2} = a^2\dfrac{\partial^2 u}{\partial x^2}$.

Для самостоятельного решения

1.10. Найдите частные производные функции $u = f(xy)g(yz)$, где f и g — произвольные дифференцируемые функции.

1.11. Найдите решение уравнения $\dfrac{\partial u}{\partial y} = x^2 + y^2$ такое, что $u(x,x) = 0$.

1.12. Найдите частные производные второго порядка функций
а) $u = f(x+y, x^2+y^2)$; б) $u = f(xy, \dfrac{x}{y})$.