“„Љ УДК 519.63

ЧИСЛЕННЫЙ МЕТОД ДЛЯ ПАРАБОЛИЧЕСКОГО УРАВНЕНИЯ В ПОЛОСЕ [1)]

А.И. Задорин

Омский филиал Института Математики СО РАН
E-mail zadorin@ofim.oscsbras.ru

В работе исследуется метод численного решения начально-краевой задачи для параболического уравнения в полуполосе. Предлагается метод редукции задачи к конечной области с последующим построением конечно-разностной схемы. Предварительно рассматривается вспомогательная краевая задача на полубесконечном интервале для системы ОДУ второго порядка. Для редукции данной задачи к конечному интервалу используется подход, предложенный в [1] и развиваемый в ряде работ, например, в [2], [3]. Подход основан на выделении многообразия решений системы, удовлетворяющих предельному условию на бесконечности, в виде системы ОДУ первого порядка, которую можно использовать в качестве недостающего граничного условия при переходе к конечному интервалу.

Под C и C_i будем понимать положительные постоянные, не зависящие от параметра ε и шагов разностной сетки.

1. Краевая задача для системы ОДУ на полубесконечном интервале

Рассмотрим краевую задачу для системы ОДУ:

$$\varepsilon^2\mathbf{U}''(x) - P(x)\mathbf{U}(x) = \mathbf{F}(x), \tag{1}$$

$$\mathbf{U}(0) = \mathbf{A}, \quad \lim_{x\to\infty}\mathbf{U}(x) = \mathbf{0}, \tag{2}$$

Предполагаем, что матрица $P(x)$ и вектор-функция $\mathbf{F}(x)$ являются достаточно гладкими по x, матрица $P(x)$ является положительно определенной:

$$P(x) \geqslant \alpha I, \;\; \alpha > 0 \;\; \varepsilon > 0, \lim_{x\to\infty} P(x) = P_\infty.$$

В соответствии с [3] справедлива оценка устойчивости:

$$\max_x ||\mathbf{U}(x)|| \leqslant \sqrt{\frac{1}{\alpha^2}\,\max_x ||\mathbf{F}(x)||^2 + ||\mathbf{A}||^2}, \;\; x \geqslant 0, \tag{3}$$

где

$$||\mathbf{U}|| = \Big\{\sum_{k=1}^n U_k^2\Big\}^{1/2}.$$

[1)]Работа выполнена при поддержке РФФИ (проект 07-01-00729) и национального фонда Болгарии (проект HS-MI-106/2005).

Исследуем вопрос редукции задачи (1)-(2) к конечному интервалу. Следующим уравнением выделим многообразие решений уравнения (1), удовлетворяющих предельному условию (2) на бесконечности:

$$\varepsilon \mathbf{U}'(x) + G(x)\mathbf{U}(x) = \beta(x), \tag{4}$$

где матрица $G(x)$ — решение сингулярной задачи Коши для матричного уравнения Риккати:

$$\varepsilon G'(x) - G^2(x) + P(x) = 0, \ \lim_{x\to\infty} G(x) = \sqrt{P_\infty}, \tag{5}$$

вектор-функция $\beta(x)$ — решение сингулярной задачи Коши:

$$\varepsilon \beta'(x) - G(x)\beta(x) = \mathbf{F}(x), \ \lim_{x\to\infty} \beta(x) = 0. \tag{6}$$

В соответствии с [3] при всех $x \geqslant 0 \quad G(x) \geqslant \sqrt{\alpha} I$. Учитывая положительную определенность матрицы $G(x)$ и предельное условие $\lim\limits_{x\to\infty} \beta(x) = 0$, можно показать, что все решения уравнения (4) стремятся к нулю на бесконечности; с учетом задач (5)-(6) уравнение (5) действительно выделяет многообразие решений уравнения (1) с предельным нулевым условием на бесконечности. Используя выделенное многообразие (4), редуцируем задачу (1)-(2) к задаче на конечном интервале $[0, L]$ для произвольного $L > 0$:

$$\varepsilon^2 \mathbf{U}''(x) - P(x)\mathbf{U}(x) = \mathbf{F}(x), \tag{7}$$

$$\mathbf{U}(0) = \mathbf{A}, \ \ \varepsilon \mathbf{U}'(L) + G(L)\mathbf{U}(L) = \beta(L). \tag{8}$$

Покажем, что посредством (7)-(8) задача (1)-(2) редуцируется к конечному интервалу $[0, L]$ точным образом. Для этого запишем вспомогательную задачу:

$$\varepsilon \mathbf{W}'(x) + G(x)\mathbf{W}(x) = \beta(x), \ \mathbf{W}(0) = \mathbf{A}. \tag{9}$$

Несложно убедиться, что решение задачи (9) является решением задач (1)-(2) и (7)-(8), рассматриваемые задачи имеют единственное решение. Из этого следует, что решения задач (1)-(2) и (7)-(8) совпадают на интервале $[0, L]$.

Итак, для редукции задачи (1)-(2) к конечному интервалу остается определить $G(L)$ и $\beta(L)$ из сингулярных задач Коши (5) и (6). Остановимся на вопросе приближенного нахождения $G(L)$, случай с $\beta(L)$ аналогичен.

Ищем решение задачи (5) в виде:

$$G^m(x) = \sum_{k=0}^{m} G_k(x)\varepsilon^k.$$

Подставляя это разложение в (5), получим рекуррентную формулу:

$$G_0(x)G_k(x) + G_k(x)G_0(x) = G'_{k-1}(x) - \sum_{i=1}^{k-1} G_i(x)G_{k-i}(x), \ k \geqslant 1, \ G_0(x) = \sqrt{P(x)}. \tag{10}$$

Оценка погрешности $||G^m(x) - G(x)||$ может быть получена в случае устойчивости решения задачи (5) к возмущению матрицы $P(x)$, что, в свою очередь, зависит от ограничений, накладываемых на матрицу $P(x)$. В случае симметричной матрицы

$P(x)$ в соответствии с [3] решение задачи (5) устойчиво к возмущению матрицы $P(x)$ и справедлива оценка точности:

$$\max_x ||G^m(x) - G(x)|| \leqslant C\varepsilon^{m+1}.$$

Точность асимптотического разложения $G(x)$ увеличивается с уменьшением параметра ε и с увеличением количества слагаемых в разложении.

Можно решение задачи (5) искать в виде ряда по степеням x^{-1}. Пусть для $x \geqslant L$

$$P^m(x) = \sum_{k=0}^{m} \frac{P_k}{x^k}, \quad F^m(x) = \sum_{k=1}^{m} \frac{F_k}{x^k}. \tag{11}$$

Тогда $G(x)$ будем искать в виде:

$$G^m(x) = \sum_{k=0}^{m} \frac{G_k}{x^k}, \quad \beta^m(x) = \sum_{k=0}^{m} \frac{\beta_k}{x^k}.$$

Подставляя разложения в (5), получим рекуррентную формулу:

$$G_0 G_k + G_k G_0 = P_k - (k-1)\varepsilon G_{k-1} - \sum_{i=1}^{k-1} G_i G_{k-i}, \quad G_0 = \sqrt{P_\infty}. \tag{12}$$

Оценка точности такого разложения имеет вид:

$$||G^m(x) - G(x)|| \leqslant CL^{-(m+1)}.$$

Точность разложения увеличивается с увеличением L и с привлечением большего числа слагаемых в разложении. Данный подход не предполагает наличие малого параметра при старших производных.

2. Параболическое уравнение в полуполосе

Рассмотрим начально-краевую задачу:

$$-\frac{\partial u}{\partial t} + \varepsilon^2 \frac{\partial^2 u}{\partial x^2} + \varepsilon^2 \frac{\partial^2 u}{\partial y^2} - b(x,y)u = f(x,y,t),$$

$$u(x,0,t) = \phi_1(x,t), u(x,1,t) = \phi_2(x,t), \ u(x,y,0) = \phi_3(x,y),$$

$$u(0,y,t) = \phi_4(y,t), \ \lim_{x\to+\infty} u(x,y,t) = 0 \tag{13}$$

для полубесконечной полосы $D = \{0 \leqslant x < \infty, \ 0 \leqslant y \leqslant 1\}$ и $0 \leqslant t \leqslant 1$.

Функции $b, f, \ \phi_i$ достаточно гладкие в D, $\varepsilon > 0$, $b(x,y) \geqslant b_0 > 0$,

$$\lim_{x\to\infty} \phi_i(x) = 0, \ i = 1,2, \quad \lim_{x\to\infty} f(x,y,t) = 0, \ \lim_{x\to\infty} b(x,y) = b_+(y).$$

Предполагаем, что выполнены условия согласования краевых и начальных условий, при которых функция $u(x,y,t)$ является достаточно гладкой. Известно, что для производных справедливы оценки:

$$\left| \frac{\partial^j}{\partial y^j} u(x,y,t) \right| \leqslant C_1 \left[1 + \varepsilon^{-j} \left(\exp\{-\sqrt{m}\varepsilon^{-1} y\} + \exp\{\sqrt{m}\varepsilon^{-1}(y-1)\} \right) \right],$$

$$\left|\frac{\partial^j}{\partial x^j}u(x,y,t)\right| \leqslant C_2\left[1+\varepsilon^{-j}\exp\{-\sqrt{m}\varepsilon^{-1}x\}\right], \ \left|\frac{\partial^j u}{\partial t^j}\right| \leqslant C_3, \tag{14}$$

где $b_0/2 < m < b_0,\ j = 1,2,3,4$. Таким образом, решение задачи (13) имеет пограничные слои у границы $x = 0$ и вдоль полосы.

Метод прямых. Введем сетку Ω с равномерным шагом τ, $\tau = 1/K$ по t и неравномерными шагами h_j, $j = 1,2,\dots,M$, по y, сгущающуюся у границ полосы, для определенности, сетку Н.С. Бахвалова [4]. Использование других сеток, например [5], не влияет на дальнейшие рассуждения. Аппроксимируя уравнение (13) по t и y, перейдем к системе дифференциально - разностных уравнений:

$$L_j^i\mathbf{V}(x) = -\frac{V_j^i - V_j^{i-1}}{\tau} + \varepsilon^2\frac{d^2}{dx^2}V_j^i + \varepsilon^2\Lambda_{yy,j}V^i - b(x,y_j)V_j^i = f(x,y_j,t_i),$$

$$0 < j < N,\ 0 < i \leqslant M,\ \ V_j^i(0) = \phi_4(y_j,t_i),\ \lim_{x\to+\infty}V_j^i(x) = 0,$$

$$V_0^i(x) = \phi_1(x,t_i),\ V_N^i(x) = \phi_2(x,t_i),\ V_j^0(x) = \phi_3(x,y_j), \tag{15}$$

где

$$\Lambda_{yy,j}V^i = 2\frac{h_j(V_{j+1}^i - V_j^i) - h_{j+1}(V_j^i - V_{j-1}^i)}{h_jh_{j+1}(h_j+h_{j+1})}.$$

Учитывая выбор узлов по y, можно оценить погрешность перехода от задачи (13) к краевой задаче для системы ОДУ на полубесконечном интервале (15).

Лемма. *Пусть* $\mathbf{U}(x) = [u(x,y,t)]_\Omega$. *Тогда для некоторой постоянной* C

$$\max_{i,j,x}|U_j^i(x) - V_j^i(x)| \leqslant \frac{C}{N^2} + C\tau.$$

Итак, начально-краевая задача для параболического уравнения в полуполосе на каждом шаге по времени сведена к краевой задаче на полубесконечном интервале для системы ОДУ вида (1)-(2) с матрицей $P(x)$:

$$P(x) = \begin{pmatrix} p_1 + \frac{2\varepsilon^2}{h_1h_2} & -\frac{2\varepsilon^2}{h_1(h_1+h_2)} & \dots & 0 \\ -\frac{2\varepsilon^2}{h_2(h_2+h_3)} & p_2 + \frac{2\varepsilon^2}{h_2h_3} & -\frac{2\varepsilon^2}{h_2(h_2+h_3)} & \dots \\ & \dots & & \\ 0 & \dots & \dots & p_M + \frac{2\varepsilon^2}{h_{M-1}h_M} \end{pmatrix},$$

где $p_i = b(x,y_i) + \tau^{-1}$. Далее примененим подход предыдущего параграфа для редукции задачи к конечному интервалу, в векторном виде задача для конечного интервала имеет вид:

$$\varepsilon^2\frac{d^2}{dx^2}\mathbf{V}^i - P(x)\mathbf{V}^i = \mathbf{F}(x),\ \mathbf{V}^i(0) = \Phi_4(t_i),\ \varepsilon(\mathbf{V}^i)'(L) + G(L)\mathbf{V}^i(L) = \beta(L), \tag{16}$$

где $i = 1,2,\dots,K$, $\mathbf{V} = (V_1,V_2,\dots,V_M)^T$, $\Phi_4 = (\phi_4(y_1),\phi_4(y_2),\dots,\phi_4(y_M))^T$. Остается осуществить аппроксимацию производных в задаче (16). При разностной аппроксимации производных по x необходимо учесть пограничный слой у границы $x = 0$. Сделать это можно сгущением сетки по x по аналогии с учетом пограничного слоя у границ полосы. Если в решении нет пограничных слоев, то сетка по переменным x, y может быть равномерной, тогда матрица $P(x)$ будет положительно определенной и симметричной.

Список литературы

1. Абрамов А.А. О переносе условия ограниченности для некоторых систем обыкновенных линейных дифференциальных уравнений // Журн. вычисл. матем. и матем. физ. — 1961. — Т. 1, N 4, — С. 733-737.
2. Абрамов А.А., Балла К., Конюхова Н.Б. Перенос граничных условий из особых точек для систем линейных обыкновенных дифференциальных уравнений / Сообщ. по вычисл. матем. — М.: ВЦ АН СССР, 1981.
3. Задорин А.И., Харина О.В. Численный метод для системы линейных уравнений второго порядка с малым параметром на полубесконечном интервале.// Сибирский журнал вычислительной математики, 2004, т. 7, N 2, с. 103-114.
4. Бахвалов Н.С. К оптимизации методов решения краевых задач при наличии пограничного слоя.//Журнал вычисл. матем. и матем. физ., 1969, т. 9, N 4, с. 841-890.
5. Miller J.J.H., O'Riordan E., Shishkin G.I. Solution of Singularly Perturbed Problems with ε - uniform Numerical Methods, World Scientific, Singapore, 1996.