УДК 519.65

ИНТЕРПОЛЯЦИОННЫЕ ФОРМУЛЫ ДЛЯ ФУНКЦИЙ С БОЛЬШИМИ ГРАДИЕНТАМИ В ПОГРАНИЧНЫХ СЛОЯХ

© А. И. Задорин
Институт математики им. С.Л. Соболева СО РАН, Омск, Россия

Аннотация. Интерполяция функций на основе многочленов Лагранжа получила широкое применение. Однако в случае, когда интерполируемая функция имеет области больших градиентов, применение многочленов Лагранжа приводит к существенным погрешностям. В работе предполагается, что интерполируемая функция одной переменной представима в виде суммы регулярной и погранслойной составляющих. Предполагается, что производные регулярной составляющей до определенного порядка ограничены, а погранслойная составляющая является функцией общего вида, известная с точностью до множителя, ее производные не являются равномерно ограниченными. Такое представление имеет решение сингулярно возмущенной краевой задачи. Строятся интерполяционные формулы, точные на погранслойной составляющей, получены оценки погрешности интерполяции, равномерные по погранслойной составляющей и ее производным. Исследовано применение построенных интерполяционных формул к построению формул численного дифференцирования и интегрирования функций рассматриваемого вида, имеющих большие градиенты в пограничном слое.

Ключевые слова: функция одной переменной, большие градиенты, интерполяция Лагранжа, неполиномиальная интерполяция, квадратурные формулы, оценка погрешности.

INTERPOLATION FORMULAS FOR FUNCTIONS WITH LARGE GRADIENTS IN THE BOUNDARY LAYERS

© A. I. Zadorin
Sobolev Institute of Mathematics SB RAS, Omsk, Russia

Abstract. Interpolation of functions on the basis of Lagrange's polynomials was widely used. However in a case when the interpolated function has areas of large gradients, application of polynomials of Lagrange leads to essential errors. In work it is supposed that the interpolated function of one variable is representable in the form of the sum of regular and boundary layer components. It is supposed that derivatives of a regular component to a certain order are bounded, and the boundary layer component is function of a general view, known to within a multiplier, its derivatives aren't uniformly bounded. A solution of a singularly perturbed boundary value problem has such representation. Interpolation formulas, exact on a boundary layer component are constructed. Interpolation error estimates, uniform on a boundary layer component and its derivatives are received. Application of the constructed interpolation formulas to creation of formulas of numerical differentiation and integration of the functions of the considered form, having large gradients in the boundary layer, is investigated.

Keywords: function of one variable, large gradients, Lagrange interpolation, nonpolynomial interpolation, quadrature formula, error estimation.

1. Введение

Для интерполяции функций широко используются многочлены Лагранжа [1]. Однако в соответствии с [2] случае функций с большими градиентами применение интерполяции Лагранжа может приводить к погрешностям порядка O(1). В работе исследуется подход к интерполяции функций одной переменной с большими градиентами на основе аддитивного выделения, с точностью до множителя, составляющей, задающей основной рост интерполируемой функции в пограничном слое. Данный подход применим к широкому классу функций, являющихся решением сингулярно возмущенных краевых задач [3]. На основе разрабатываемых интерполяционных формул строятся формулы численного дифференцирования и интегрирования функций с аддитивно выделенной погранслойной составляющей.

2. Построение интерполяционной формулы

Исследуем вопрос интерполяции функций с большими градиентами, представимых в виде:

$$u(x) = p(x) + \gamma\Phi(x), \quad x \in [a,b], \tag{1}$$

где $p(x)$ – регулярная составляющая с ограниченными производными до некоторого порядка, $\Phi(x)$ – известная погранслойная составляющая с большими градиентами, постоянная γ не задана. Представление (1) справедливо, например, для решения сингулярно возмущенной краевой задачи [3]:

$$\varepsilon u''(x) + a(x)u'(x) - b(x)u(x) = f(x), u(0) = A, u(1) = B, \tag{2}$$

где входящие функции являются достаточно гладкими, $a(x) \ge \alpha > 0, b(x) \ge 0, \varepsilon \in (0,1]$. Известно, что решение задачи (2) имеет большие градиенты около границы $x = 0$. Решение этой задачи представимо в виде (1), например, при задании $\Phi(x) = e^{-a(0)x/\varepsilon}$, $\gamma = -\varepsilon u'(0)/a(0)$. Тогда для некоторой постоянной C, не зависящей от ε, $|p'(x)| \le C$. Функция $\Phi(x)$ имеет большие градиенты при малых значениях ε. Зададим равномерную сетку:

$$\Omega^h = \{ x_n : x_n = a + (n-1)h, \; x_1 = a, \; x_k = b, \; n = 1,2,...,k \}.$$

Предполагаем, что функция $u(x)$, имеющая представление (1), задана в узлах сетки, $u_n = u(x_n)$. Пусть $L_k(u,x)$ - многочлен Лагранжа для функции $u(x)$ с узлами интерполяции $x_1, x_2, ..., x_k$. Несложно убедиться, что если задать $u(x) = e^{-x/\varepsilon}$, то погрешность интерполяции многочленом Лагранжа при $\varepsilon \le h$ будет порядка $O(1)$ независимо от числа узлов интерполяции k. Таким образом, если не использовать специальное сгущение сетки, то многочлен Лагранжа не подходит для интерполяции функций вида (1).

В [4] для интерполяции функции вида (1) построена интерполяционная формула, точная на погранслойной составляющей $\Phi(x)$:

$$L_{\Phi,k}(u,x) = L_{k-1}(u,x) + \frac{[x_1, x_2, ..., x_k]u}{[x_1, x_2, ..., x_k]\Phi} \left[\Phi(x) - L_{k-1}(\Phi, x)\right] \tag{3}$$

Знаменатель в этой формуле не обращается в нуль, если $\Phi^{(k-1)}(x) \ne 0, x_1 < x < x_k$. Отметим, что формула (3) точна на многочленах степени $k-2$ и на функции $\Phi(x)$. В соответствии с [4] справедливо следующее утверждение.

Теорема 1. Пусть

$$M_k(\Phi, x) = \frac{\Phi(x) - L_{k-1}(\Phi, x)}{\Phi(x_k) - L_{k-1}(\Phi, x_k)}.$$

Тогда

$$|L_{\Phi,k}(u,x)-u(x)|\le \max|p^{k-1}(s)|\left[|M_k(\Phi,x)|+1\right]h^{k-1}.$$

В [5] исследована ограниченность $|M_k(\Phi,x)|$ в случаях $k=2,3.$ В случае произвольного значения k $|M_k(\Phi,x)|\le 1,$ если производные $\Phi^{(k-1)}(x),\Phi^{(k)}(x)$ на интервале интерполяции одного знака. Отметим, что формула (3) может быть преобразована к виду:

$$L_{\Phi,k}(u,x)=L_k(u,x)+\frac{[x_1,x_2,...,x_k]u}{[x_1,x_2,...,x_k]\Phi}\left[\Phi(x)-L_k(\Phi,x)\right]. \qquad (4)$$

3. Формулы численного дифференцирования

Классические формулы численного дифференцирования следуют из дифференцирования многочлена Лагранжа. Однако такие формулы не учитывают большие градиенты дифференцируемой функции в области пограничного слоя. Дифференцируя интерполянт (3), получаем формулы численного дифференцирования, точные на погранслойной составляющей $\Phi(x)$:

$$u^{(j)}(x)\approx L_{k-1}^{(j)}(u,x)+\frac{[x_1,x_2,...,x_k]u}{[x_1,x_2,...,x_k]\Phi}\left[\Phi^{(j)}(x)-L_{k-1}^{(j)}(\Phi,x)\right].$$

Например, на сеточном интервале $[x_{k-1},x_k]$ приближенные формулы для первой производной имеют вид:

$$L_2'(u,x)=\frac{u_k-u_{k-1}}{h},\quad L_{\Phi,2}'(u,x)=\frac{u_k-u_{k-1}}{\Phi_k-\Phi_{k-1}}\Phi'(x). \qquad (5)$$

Пусть $u(x)=e^{-x/\varepsilon}.$ Тогда при $\varepsilon=h$ для относительной погрешности классической формулы в (5) справедливо соотношение $\varepsilon|L_2'(u,0)-u'(0)|=e^{-1}.$ Следовательно, нельзя повысить точность классической разностной формулы за счет уменьшения шага сетки, если параметр ε достаточно мал. Для предложенной формулы $L_{\Phi,2}'(u,x)$ при задании $u(x)=e^{-x/\varepsilon}$ можно убедиться в справедливости оценки $\varepsilon|L_{\Phi,2}'(u,x)-u'(x)|\le Ch,\ x\in[x_{k-1},x_k].$ Относительная погрешность построенной разностной формулы для производной порядка $O(h)$ равномерно по параметру ε.

4. Формулы численного интегрирования

Как известно, построение формул Ньютона-Котеса основано на приближении подынтегральной функции интерполяционным многочленом Лагранжа. Как нами было показано, многочлен Лагранжа плохо приближает функцию, имеющую большие градиенты в области пограничного слоя. Следовательно, применение формул Ньютона–Котеса к функциям вида (1) может приводить к существенным погрешностям. Нами было показано в [6-8], что составные формулы Ньютона-Котеса с числом узлов от двух до пяти имеют только первый порядок точности по шагу сетки. В этих работах на основе интерполянта (3) были построены и обоснованы квадратурные формулы с числом узлов от двух до пяти, погрешность которых равномерна по погранслойной составляющей $\Phi(x)$.

Рассмотрим общий случай, когда число узлов формулы k. Вычисляем интеграл:

$$I(u)=\int_a^b u(x)\,dx.$$

Пусть $S_k(u)$ – замкнутая формула Ньютона-Котеса с k узлами. Задавая $u(x)=e^{-x/\varepsilon}$, получаем, что при $\varepsilon \le h$ справедлива оценка $|I(u)-S_k(u)| \ge Ch$ при различных значениях k. Таким образом, разработка квадратурных формул для функций вида (1) актуальна. Для построения квадратурной формулы используем приближение подынтегральной функции $u(x)$ интерполянтом (4) и, интегрируя, получаем:

$$S_{\Phi,k}(u)=S_k(u)+\frac{[x_1,x_2,...,x_k]u}{[x_1,x_2,...,x_k]\Phi}\left[\int_a^b \Phi(x)dx - S_k(\Phi)\right]. \qquad (6)$$

Квадратурная формула (6), полученная в [9], является точной на составляющей $\Phi(x)$. В формуле (6) выражения от $\Phi(x)$ вычисляются в явном виде. Для формулы (6) можно получить другое представление, если использовать формулу (3).

Теорема 2. Пусть функция $u(x)$ имеет представление (1), причем выполнены условия

$$\Phi^{(k-1)}(x)>0, \Phi^{(k)}(x)>0,\ x\in(a,b),\ \ I(\Phi)\le S_k(\Phi),$$

или с противоположным знаком. Тогда справедлива оценка погрешности:

$$|S_{\Phi,k}(u)-I(u)| \le \frac{2}{(k-1)^{k-1}}\max|p^{(k-1)}(s)|(b-a)^{k}. \qquad (7)$$

Оценка (7) равномерна по погранслойной составляющей $\Phi(x)$ и ее производным. Из (7) следует, что составная квадратурная формула, построенная на основе формулы (6) имеет порядок точности $k-1$. Отметим, что формула Ньютона-Котеса, независимо от числа узлов k, имеет только первый порядок точности. В [6-8] квадратурная формула (6) исследовалась при $k=2,3,4,5$ и доказано, что оценка вида (7) имеет место, если условия теоремы 2 заменить на одно условие: $\Phi^{(k-1)}(x)\ne 0,\ a<x<b$.

References

1. Bakhvalov N.S., Zhidkov N.P., Kobel'kov G.M. *Numerical Methods* (Nauka, Moscow, 1987).
2. Zadorin A.I. *Method of interpolation for a boundary layer problem*, Sib. J. of Numer. Math. **10**(3), 267-275 (2007).
3. Shishkin G.I. *Grid Approximations of Singular Perturbation Elliptic and Parabolic Equations* (UB RAS, Yekaterinburg, 1992).
4. Zadorin A.I., Zadorin N.A. *Interpolation formula for functions with a boundary layer component and its application to derivatives calculation*, Siberian Electron. Math. Rep. **9**, 445-455 (2012).
5. Zadorin A.I., Zadorin N.A. *Spline interpolation on a uniform grid for functions with a boundary-layer component*, Comput. Math. Math. Phys. **50**(2), 211-223 (2010).
6. Zadorin A.I., Zadorin N.A. *Quadrature formulas for functions with a boundary-layer component*, Comput. Math. Math. Phys. **51**(11), 1837-1846 (2011).
7. Zadorin A.I., Zadorin N.A. *An analogue of the four-point Newton-Cotes formula for a function with a boundary-layer component*, Numerical Analysis and Applications **6**(4), 268-278 (2013).

8. Zadorin A., Zadorin N. *Quadrature formula with five nodes for functions with a boundary layer Component*, Lecture Notes in Computer Science, Springer, Berlin **8236,** 540-546 (2013).
9. Zadorin A.I., Zadorin N.A. *Analogue of Newton-Cotes formulas for numerical integration of functions with a boundary-layer component*, Comput. Math. Math. Phys. **56**(3), 358-366. (2016).

Сведения об авторе

ЗАДОРИН Александр Иванович, доктор физико-математических наук, профессор, заведующий лабораторией, Институт математики им. С.Л. Соболева СО РАН.
Адрес для переписки: zadorin@ofim.oscsbras.ru