Метод интерполяции для задачи с пограничным слоем*

А.И. Задорин

УДК 519.62

Задорин А.И. Метод интерполяции для задачи с пограничным слоем // Сиб. журн. вычисл. математики / РАН. Сиб. отд-ние.— Новосибирск, 2007.— Т. 10, № 3.— С. 267–275.

Рассматривается краевая задача для сингулярно возмущенного обыкновенного дифференциального уравнения второго порядка. Предполагается, что решение задачи найдено в узлах равномерной или неравномерной сетки с применением сходящейся разностной схемы. Предложен метод интерполяции с учетом погранслойной составляющей решения. Построенный интерполянт позволяет находить с равномерной по параметру точностью производную в произвольной точке интервала.

Ключевые слова: *обыкновенное дифференциальное уравнение, пограничный слой, сеточное решение, линейная интерполяция, экспоненциальная интерполяция, численное дифференцирование.*

Zadorin A.I. Method of interpolation for a boundary layer problem // Siberian J. Num. Math. / Sib. Branch of Russ. Acad. of Sci.— Novosibirsk, 2007.— Vol. 10, № 3.— P. 267–275.

A singularly perturbed boundary value problem for a second order ordinary differential equation is considered. It is assumed that the solution is found at the nodes of a uniform or nonuniform mesh. An interpolation method taking into account the boundary layer part of the solution is proposed. Using the constructed interpolation function, we find the derivative of the solution with an accuracy uniform with respect to a parameter at any point of the interval.

Key words: *ordinary differential equation, boundary layer, mesh solution, linear interpolation, exponential interpolation, numerical differentiation.*

Как известно, при решении задач с пограничным слоем равномерная сходимость разностных схем достигается либо на основе подгонки разностной схемы к погранслойной составляющей решения [1], либо с использованием классических разностных схем на специальных сетках, сгущающихся в пограничном слое [2, 3]. Представляет интерес вопрос нахождения решения и его производной в произвольной точке исходного интервала после того, как решение найдено в узлах сетки, что и исследуется в данной работе.

1. Построение интерполирующей функции

Рассмотрим краевую задачу

$$\varepsilon u''(x) + a(x)u'(x) - b(x)u(x) = f(x), \quad u(0) = A, \quad u(1) = B. \tag{1}$$

Предполагаем, что

---

*Работа выполнена при финансовой поддержке гранта РФФИ (проект № 04-01-00578) и национального фонда Болгарии (проект HS-MI-106/2005).

$$a(x) \geq \alpha > 0, \qquad b(x) \geq 0, \qquad \varepsilon > 0,$$

функции a, b, f — достаточно гладкие. При малых значениях параметра ε решение задачи (1) содержит область пограничного слоя в окрестности нуля, в соответствии, например, с [4] для производных справедлива оценка

$$|u^j(x)| \leq \frac{C_1}{\varepsilon^j} \exp(-\alpha\varepsilon^{-1}x) + C_2, \tag{2}$$

подразумевается, что положительные постоянные C и C_j не зависят от параметра ε и шагов разностной сетки. Пусть для задачи (1) известно решение в узлах сетки

$$\Omega = \{x_n : x_n = x_{n-1} + h_n,\ x_0 = 0,\ x_N = 1,\ n = 1, 2, \ldots, N\}.$$

Рассмотрим вопрос нахождения решения в произвольной точке $x \in [0, 1]$ на основе интерполяции. Остановимся на методе линейной интерполяции. Пусть для произвольного интервала $\Delta_n = [x_{n-1}, x_n]$:

$$u_L(x) = (u_n - u_{n-1})\frac{x - x_n}{h_n} + u_n, \quad u_n = u(x_n). \tag{3}$$

Нетрудно убедиться, что в случае решения $u(x) = \exp(-\varepsilon^{-1}x)$ и $\varepsilon = h_1$

$$u_L(h_1/2) - u(h_1/2) = (1 + e^{-1} - 2e^{-0.5})/2.$$

Следовательно, если не задаваться определенными ограничениями на соотношение параметра ε и шагов сетки, то погрешность линейной интерполяции может не уменьшаться при уменьшении длины интерполяционного интервала.

Оценим $|u_L(x) - u(x)|$. Имеем

$$u_L(x) - u(x) = u'(s)(x - x_n) - u'(\xi)(x - x_n) = u''(\eta)(s - \xi)(x - x_n),$$

где $x_{n-1} \leq s, \xi, \eta \leq x_n$. Следовательно,

$$|u_L(x) - u(x)| \leq M_2 h_n^2, \tag{4}$$

где

$$|u^{(2)}(x)| \leq M_2, \quad x \in [x_{n-1}, x_n]. \tag{5}$$

Для решения задачи с пограничным слоем $M_2 = C/\varepsilon^2$, поэтому оценка (4) не гарантирует погрешности интерполяции порядка $O(h_n^2)$, о чем и свидетельствует приведенный пример.

Построим интерполяционную формулу, точность которой не зависит от значения параметра ε. В соответствии с [4] для решения задачи (1) справедливо представление

$$u(x) = \gamma \exp(-a_0\varepsilon^{-1}x) + P(x), \tag{6}$$

где γ — некоторая постоянная, $|\gamma| \leq C_3$, $P(x)$ — функция, не содержащая погранслойный рост, $|P^j(x)| \leq C_4\varepsilon^{1-j}$. Пусть Δ_n — произвольный сеточный интервал. Тогда

$$\gamma \exp(-a_0\varepsilon^{-1}x_n) + P(x_n) = u_n,$$

$$\gamma \exp(-a_0\varepsilon^{-1}x_{n-1}) + P(x_{n-1}) = u_{n-1}.$$

Из условия ограниченности $P'(x)$ следует

$$P(x_n) - P(x_{n-1}) = \rho_1 h_n, \quad |\rho_1| \le C_4.$$

Из системы двух уравнений получим:

$$\gamma = (u_n - u_{n-1} - \rho_1 h_n) \,/\, \left[\exp(-a_0\varepsilon^{-1}x_n) - \exp(-a_0\varepsilon^{-1}x_{n-1})\right],$$
$$P(x) = P(x_n) + \rho_2(x - x_n), \quad |\rho_2| \le C_4,\ P(x_n) = u_n - \gamma\exp(-a_0\varepsilon^{-1}x_n).$$

Используя эти соотношения и (6), получим выражение для $u(x)$ на интервале Δ_n:

$$u(x) = (u_n - u_{n-1} - \rho_1 h_n)[\exp(-a_0\varepsilon^{-1}x_n) - \exp(-a_0\varepsilon^{-1}x_{n-1})]^{-1} \times$$
$$[\exp(-a_0\varepsilon^{-1}x) - \exp(-a_0\varepsilon^{-1}x_n)] + u_n + \rho_2(x - x_n). \tag{7}$$

Учитывая (7), определим интерполяционную формулу для интервала Δ_n:

$$u_h(x) = (u_n - u_{n-1})[\exp(-a_0\varepsilon^{-1}x_n) - \exp(-a_0\varepsilon^{-1}x_{n-1})]^{-1} \times$$
$$[\exp(-a_0\varepsilon^{-1}x) - \exp(-a_0\varepsilon^{-1}x_n)] + u_n. \tag{8}$$

Построенная формула действительно является интерполяционной: $u_h(x_{n-1}) = u_{n-1}$, $u_h(x_n) = u_n$. Вычитая из (8) (7), получим

$$|u_h(x) - u(x)| \le C_5 h_n. \tag{9}$$

Итак, доказали, что точность построенной интерполяционной формулы (8) порядка $O(h_n)$ для каждого интервала Δ_n равномерно по ε.

Нетрудно убедиться, что интерполяционная формула (8) устойчива к возмущениям u_n, u_{n-1}, если

$$|u_n - \tilde{u}_n| \le \theta, \qquad |u_{n-1} - \tilde{u}_{n-1}| \le \theta,$$

то

$$|u_L(x) - \tilde{u}_L(x)| \le 3\theta, \quad x \in \Delta_n.$$

Пусть задача (1) решена на основе применения разностной схемы, обладающей свойством равномерной сходимости по параметру ε, во всех узлах сетки $|u_n - u_n^h| \le \theta$, где u_n^h — решение разностной схемы в узле x_n, θ — точность разностной схемы. Пусть

$$\tilde{u}_h(x) = (u_n^h - u_{n-1}^h)[\exp(-a_0\varepsilon^{-1}x_n) - \exp(-a_0\varepsilon^{-1}x_{n-1})]^{-1}\times$$
$$[\exp(-a_0\varepsilon^{-1}x) - \exp(-a_0\varepsilon^{-1}x_n)] + u_n^h. \tag{10}$$

Тогда в соответствии со сказанным выше

$$|\tilde{u}_h(x) - u(x)| \le C_5 h_n + 3\theta, \quad x \in \Delta_n, \quad n = 1, 2, \ldots, N.$$

В случае схемы из [1] сетка равномерна и точность схемы порядка $O(h)$ равномерно по ε. Применяя формулу (10), получим значения $u(x)$ в любой точке интервала [0,1] снова с погрешностью $O(h)$.

Вне области пограничного слоя формула линейной интерполяции (3) предпочтительнее построенной (8) потому, что она второго порядка точности по h_n и более проста в реализации, поэтому в этом случае ее целесообразно использовать. Изучим это подробнее.

Итак, остановимся на интерполяционной формуле (3) для интервала Δ_n.

Пусть $x_{n-1} \ge \sigma_2 = -2\varepsilon\alpha^{-1}\ln(\varepsilon)$. Тогда в соответствии с (2) при $x \in \Delta_n$

$$|u''(x)| \le \frac{C_1}{\varepsilon^2}\exp(-\alpha\varepsilon^{-1}x_{n-1}) + C_2 \le C_1 + C_2,$$

в соответствии с (4)

$$|u_L(x) - u(x)| \le Ch_n^2, \quad x \in \Delta_n.$$

Пусть $x_{n-1} \ge \sigma_1 = -2\varepsilon\alpha^{-1}\ln(\varepsilon h_n^{-0.5})$. Тогда

$$|u''(x)| \le \frac{C_1}{h_n} + C_2,$$

в соответствии с (4)

$$|u_L(x) - u(x)| \le Ch_n, \quad x \in \Delta_n. \tag{11}$$

Итак, можно предложить следующий метод сочетания линейной и экспоненциальной интерполяций: для $\sigma_1 \ge x \ge 0$ используем интерполяционную формулу (8), для $1 \ge x \ge \sigma_1$ используем формулу линейной интерполяции (3).

Тогда на интервале $[0, \sigma_2]$ погрешность интерполяции будет порядка $O(h_n)$, и на интервале $[\sigma_2, 1]$ гарантируется точность интерполяции порядка $O(h_n^2)$.

2. Вычисление производной

Остановимся на вопросе вычисления производной решения задачи (1) в произвольной точке, зная приближенное решение в узлах сетки. Дифференцируя линейный интерполянт (3), для всех $x \in \Delta_n$ получим

$$u'_L(x) = \frac{u_n - u_{n-1}}{h_n}. \tag{12}$$

Оценим $\varepsilon|u'_L(x) - u'(x)|$. Несложно убедиться, что в случае функции $u(x) = \exp(-\varepsilon^{-1}x)$ при $\varepsilon = h_1$ будет $\varepsilon|u'_L(0) - u'(0)| = e^{-1}$. Следовательно, $\varepsilon|u'_L(x) - u'(x)|$ не на всех решениях задачи (1) стремится к нулю при $h_n \to 0$, и возникает необходимость в построении специальных формул численного дифференцирования в случае задачи с пограничным слоем.

Дифференцируя (8), получим

$$u'_h(x) = -\frac{a_0}{\varepsilon}\cdot\frac{(u_n - u_{n-1})\exp(-a_0\varepsilon^{-1}x)}{\exp(-a_0\varepsilon^{-1}x_n) - \exp(-a_0\varepsilon^{-1}x_{n-1})}. \tag{13}$$

Лемма 1. *Пусть $u(x)$ — решение задачи* (1)*. Тогда для некоторой постоянной C и произвольного интервала Δ_n:*

$$\varepsilon|u'_h(x) - u'(x)| \le Ch_n, \quad x \in \Delta_n.$$

Доказательство. Воспользуемся представлением (6) для решения задачи (1). Пусть $V(x) = \gamma\exp(-a_0\varepsilon^{-1}x)$. Тогда

$$u(x) = V(x) + P(x).$$

Очевидно, что

$$\varepsilon|u'_h(x) - u'(x)| \le \varepsilon|V'_h(x) - V'(x)| + \varepsilon|P'_h(x) - P'(x)|,$$

причем $V'_h(x) - V'(x) = 0$. Остается оценить $\varepsilon|P'_h(x) - P'(x)|$:

$$\varepsilon|P_h'(x)-P'(x)|\le\varepsilon|P_h'(x)-P_L'(x)|+\varepsilon|P_L'(x)-P'(x)|.$$

Для второго слагаемого имеем

$$\varepsilon\left|\frac{P_n-P_{n-1}}{h_n}-P'(x)\right|=\varepsilon|P'(s)-P'(x)|\le\varepsilon h_n\max_{\xi}|P''(\xi)|\le C_4h_n,$$

мы учли оценку производных функции $P(x)$.

Оценим первое слагаемое

$$\varepsilon|P_h'(x)-P_L'(x)|\le C_4h_n|\Phi_n(x)|,$$

где

$$\Phi_n(x)=\frac{-a_0\exp(-a_0\varepsilon^{-1}x)}{\exp(-a_0\varepsilon^{-1}x_n)-\exp(-a_0\varepsilon^{-1}x_{n-1})}-\frac{\varepsilon}{h_n}.$$

Покажем, что функция $\Phi_n(x)$ ограничена. Сначала оценим ее на концах интервала Δ_n. Имеем

$$|\Phi_n(x_n)|=\frac{\varepsilon}{h_n}\left|1-\frac{\tau}{\exp(\tau)-1}\right|,\quad \tau=a_0\varepsilon^{-1}h_n.$$

Пусть $\tau\ge1$. Тогда

$$0<1-\frac{\tau}{\exp(\tau)-1}<1,$$

из этого следует, что $|\Phi_n(x_n)|\le a_0$.

Пусть $\tau<1$. В этом случае применим разложения по τ и получим $|\Phi_n(x_n)|\le\varepsilon h_n^{-1}C\tau\le a_0C$.

Несложно показать, что

$$|\Phi_n(x_{n-1})|=\frac{\varepsilon}{h_n}\left|\frac{\tau}{1-\exp(-\tau)}-1\right|.$$

По аналогии с предыдущим случаем можно убедиться в ограниченности $|\Phi_n(x_{n-1})|$. Итак, функция $\Phi_n(x)$ убывает и по модулю ограничена на концах интервала Δ_n. Из этого следует ее ограниченность на всем интервале, равномерная по ε и h_n. □

Лемма 2. *Пусть при всех n $|u_n-\tilde u_n|\le\theta$, $\tilde u_L'$ и $\tilde u_h'$ соответствуют* (12) *и* (13) *со значениями $\tilde u_n$, $n=0,1,\dots,N$. Тогда при всех n и $x\in\Delta_n$:*

$$\varepsilon|u_h'(x)-\tilde u_h'(x)|\le C\theta\varepsilon h_n^{-1},\qquad \varepsilon|u_L'(x)-\tilde u_L'(x)|\le C\theta\varepsilon h_n^{-1}.$$

Доказательство. Пусть

$$z_h'(x)=u_h'(x)-\tilde u_h'(x).$$

Тогда

$$\varepsilon|z_h'(x)|\le\frac{2a_0\theta}{1-\exp(-a_0\varepsilon^{-1}h_n)}.$$

Введем $\tau=a_0h_n\varepsilon^{-1}$. Пусть $\tau\ge1$. Тогда

$$\varepsilon|z_h'(x)|\le\frac{2a_0\theta}{1-\exp(-1)},$$

что соответствует первому утверждению леммы. Пусть $\tau<1$. Учитывая, что при $\tau<1$ $1-\exp(-\tau)\ge\tau/2$, и в этом случае убедимся в справедливости первого неравенства. Второе неравенство более очевидно, $C=2$. □

Из лемм 1, 2 следует

$$\varepsilon|\tilde{u}_h'(x) - u'(x)| \le C(\theta\varepsilon h_n^{-1} + h_n). \tag{14}$$

В соответствии с оценкой (14) погрешность разностной схемы в узлах сетки может существенно сказаться на вычислении производной в произвольной точке на основе формулы численного дифференцирования (13), что соответствует неустойчивости операции численного дифференцирования. Можно рассмотреть задачу минимизации этой погрешности, выбирая подходящий шаг интерполяции.

Покажем, что если возмущение является непрерывно дифференцируемой функцией, то операция численного дифференцирования является устойчивой.

Лемма 3. *Пусть*

$$\tilde{u}(x) = u(x) + \theta r(x),$$

где функция $r(x)$ непрерывно дифференцируема, и для ее производной справедлива оценка $|r'(x)| \le C\varepsilon^{-1}$. Тогда при всех x

$$\varepsilon|\tilde{u}_L'(x) - u_L'(x)| \le C\theta, \qquad \varepsilon|\tilde{u}_h'(x) - u_h'(x)| \le C\theta. \tag{15}$$

Доказательство. Очевидно, что для некоторого n

$$\varepsilon|\tilde{u}_L'(x) - u_L'(x)| = \varepsilon\theta\frac{|r_n - r_{n-1}|}{h_n} \le C\theta.$$

Второе неравенство в (15) доказывается аналогично.

3. Случай специальной сетки

В ряде работ для решения задач с пограничным слоем предлагается использовать классические разностные схемы на специальных сетках, сгущающихся в пограничном слое. Мы выяснили, что формула экспоненциальной интерполяции (8) в соответствии с (9) имеет погрешность интерполяции порядка $O(h_n)$ равномерно по параметру ε, в то время как в общем случае для формулы линейной интерполяции (3) эта погрешность может быть порядка $O(1)$. Исследуем для случая сетки из [3] точность формул линейной интерполяции (3) и вычисления производных (12).

Пусть Ω — кусочно-равномерная сетка, соответствующая [3]:

$$\Omega = \left\{x_n:\ x_n = nh,\ 0 \le n \le \frac{N}{2},\ \ x_n = \sigma + \left(n - \frac{N}{2}\right)H,\ \frac{N}{2} \le n \le N\right\},$$

где

$$\sigma = \min\left\{\frac{1}{2}, \frac{\varepsilon}{\alpha}\ln(N)\right\}, \quad h = \frac{2\sigma}{N}, \quad H = \frac{2(1-\sigma)}{N}, \quad N \ge 4.$$

Пусть u^h — решение схемы направленных разностей на сетке $\Omega:$

$$\begin{gathered}\frac{2\varepsilon}{h_n + h_{n+1}}\left(\frac{u_{n+1}^h - u_n^h}{h_{n+1}} - \frac{u_n^h - u_{n-1}^h}{h_n}\right) + a(x_n)\frac{u_{n+1}^h - u_n^h}{h_{n+1}} - b(x_n)u_n^h = f(x_n),\\ 0 < n < N, \quad u_0^h = A, \quad u_N^h = B.\end{gathered} \tag{16}$$

В соответствии с [5] для схемы (16) справедлива оценка точности

$$|u_n^h - u(x_n)| \le CN^{-1} \ln^2 N. \tag{17}$$

В соответствии с оценкой (17) порядок точности схемы (16) приближается к первому с увеличением N. Оценим точность линейной интерполяции (3) для заданной сетки. Рассмотрим случай $x \in \Delta_n$ при $n > N/2$ и $n \le N/2$.

Пусть $n > N/2$, при этом $x_{n-1} \ge \sigma$. Несложно получить оценку

$$|u_L(x) - u(x)| \ \le 2 \int\limits_{x_{n-1}}^{x_n} |u'(s)|\, ds.$$

Учитывая оценку производных (2) и интегрируя, получим

$$|u_L(x) - u(x)| \le C \int\limits_{x_{n-1}}^{x_n} [\varepsilon^{-1} \exp(-\alpha\varepsilon^{-1} s) + 1]\, ds \ \le C\alpha^{-1} \exp(-\alpha\varepsilon^{-1}\sigma) + Ch_n.$$

Учитывая значение σ, для некоторой постоянной C_1 получим

$$|u_L(x) - u(x)| \le C_1 N^{-1}.$$

Пусть $n \le N/2$. Воспользуемся оценками (2), (4):

$$|u_L(x) - u(x)| \le M_2 h_n^2 \le C \left(\frac{2\sigma}{\varepsilon N}\right)^2.$$

Следовательно,

$$|u_L(x) - u(x)| \le \frac{C}{N^2} \ln^2 N.$$

Рассмотрим случай $\varepsilon\alpha^{-1} \ln(N) \ge 1/2$. В этом случае сетка Ω равномерна, $h = 1/N$. В соответствии с оценками (2), (4)

$$|u_L(x) - u(x)| \le M_2 h^2 \le \frac{Ch^2}{\varepsilon^2} \le \frac{4C \ln^2 N}{\alpha^2 N^2} \le \frac{C_1}{N^2} \ln^2 N.$$

Таким образом, погрешность линейной интерполяции на сетке из [3] значительно меньше погрешности разностной схемы.

Вычисление производной. Исследуем точность формулы (12) для вычисления производной на каждом сеточном интервале.

Пусть $n \le N/2$. Тогда

$$\varepsilon |u_L'(x) - u'(x)| \le \varepsilon M_2 h_n \le C \frac{\ln N}{N}.$$

Пусть $n > N/2$. Тогда

$$\varepsilon |u_L'(x) - u'(x)| \le \varepsilon \int\limits_{x_{n-1}}^{x_n} |u''(s)|\, ds \le \frac{C\varepsilon}{N} + \frac{C}{N} \left[1 - \exp(-\alpha\varepsilon^{-1} h_n)\right].$$

Следовательно, при $n > N/2$

$$\varepsilon|u_L'(x) - u'(x)| \le \frac{C}{N}.$$

Итак, в случае сетки из [3] погрешность формулы линейной интерполяции (3) и погрешность формулы (12) для вычисления производной не превосходят по порядку погрешности разностной схемы.

4. Результаты численных экспериментов

Приведем результаты вычислений для краевой задачи

$$\varepsilon u''(x) + u'(x) = e^x, \quad u(0) = 0, \; u(1) = 1 \tag{18}$$

в случаях равномерной и неравномерной сеток.

Равномерная сетка. Сравним численно точность формул линейной интерполяции (3) и экспоненциальной интерполяции (8), а также формул численного дифференцирования (12) и (13). Задача (18) решалась с помощью равномерно сходящейся схемы из работы А.М. Ильина [1]. В соответствии с [4] для этой схемы справедлива оценка погрешности

$$|u(x_n) - u_n^h| \le Ch^2/(h+\varepsilon).$$

Найденное решение интерполировалось на основе формул (3) и (8). Вычислялась максимальная погрешность Δ_L для интерполяционной формулы (3):

$$\Delta_L = \max_n |u_L(\bar{x}_n) - u(\bar{x}_n)|, \quad \bar{x}_n = \frac{x_{n-1} + x_n}{2}, \quad n = 1, 2, \dots, N.$$

Аналогично вычислялась погрешность интерполяции Δ_h формулы (8). В этих же узлах вычислялась погрешность вычисления производной по формулам (12) и (13). Погрешность формулы (12) вычислялась в виде

$$\Delta_L' = \varepsilon \max_n |u_L'(\bar{x}_n) - u'(\bar{x}_n)|.$$

Аналогично вычислялась погрешность Δ_h' вычисления производной по формуле (13). В табл. 1 приведены погрешности формул (3), (8), (12), (13) и максимальная по узлам погрешность разностной схемы для различных значений h. При этом $\varepsilon = h$.

Таблица 1. Сравнения на равномерной сетке

Шаг, h	Линейная интерполяция (3)	Экспоненциальная интерполяция (8)	Численное дифференц. (12)	Численное дифференц. (13)	Погрешность схемы
0.1	0.25	0.23	0.31	0.18	0.26
0.1E−1	0.55E−1	0.33E−2	0.18	0.72E−2	0.14E−2
0.1E−2	0.55E−1	0.11E−2	0.19	0.20E−2	0.14E−3
0.1E−3	0.55E−1	0.67E−4	0.19	0.11E−3	0.14E−4
0.1E−4	0.55E−1	0.64E−5	0.19	0.10E−4	0.14E−5

Из этой таблицы следует, что формула линейной интерполяции (3) теряет точность с уменьшением значения ε, в то время как формула экспоненциальной интерполяции (8) обладает точностью, равномерной по ε, что соответствует оценке (9).

Из табл. 1 следует, что классический способ вычисления производной (12) неприемлем при малых ε, в то время как формула (13) дает равномерную по ε погрешность, что соответствует лемме 1.

Неравномерная сетка. Остановимся на случае сетки, предложенной в [3]. В соответствии с [3, 5] схема направленных разностей в случае такой сетки обладает свойством равномерной сходимости, и справедлива оценка погрешности (17). В табл. 2 приведены погрешности при различных N и $\varepsilon = N^{-1}$ для формул интерполяции (3) и (8), а также для формул вычисления производных (12) и (13). Погрешности вычислялись по аналогии со случаем равномерной сетки. В последнем столбце приведена максимальная по узлам сетки погрешность схемы направленных разностей.

Таблица 2. Сравнения на неравномерной сетке

N	Линейная интерполяция (3)	Экспоненциальная интерполяция (8)	Численное дифференц. (12)	Численное дифференц. (13)	Погрешность схемы
10	0.12	0.14	0.39E−1	0.19	0.11
10E+1	0.25E−1	0.25E−1	0.15E−1	0.48E−1	0.25E−1
10E+2	0.33E−2	0.33E−2	0.20E−2	0.69E−2	0.33E−2
10E+3	0.38E−3	0.38E−3	0.21E−3	0.86E−3	0.38E−3
10E+4	0.44E−4	0.44E−4	0.23E−4	0.10E−3	0.44E−4

Автор благодарит И.А. Сабанцева за помощь в проведении численных экспериментов.

Список литературы

[1] **Ильин А.М.** Разностная схема для дифференциального уравнения с малым параметром при старшей производной // Матем. заметки. — 1969. — Т. 6, № 2. — С. 237–248.

[2] **Бахвалов Н.С.** К оптимизации методов решения краевых задач при наличии пограничного слоя // Журн. вычисл. матем. и мат. физики. — 1969. — Т. 9, № 4. — С. 841–890.

[3] **Шишкин Г.И.** Сеточные аппроксимации сингулярно возмущенных эллиптических и параболических уравнений. — Екатеринбург: Изд-во УрО РАН, 1992.

[4] **Kellogg R.B., Tsan A.** Analysis of some difference approximations for a singular perturbation problems without turning points // Math. Comput. — 1978. — Vol. 32, № 144. — P. 1025–1039.

[5] **Miller J.J.H., O'Riordan E., Shishkin G.I.** Fitted Numerical Methods for Singular Perturbation Problems. — Singapore: World Scientific, 1996.

Омский филиал Института математики СО РАН,
ул. Певцова, 13,
Омск, 644099
E-mail: zadorin@ofim.oscsbras.ru

Статья поступила
11 апреля 2006 г.
Переработанный вариант
10 октября 2006 г.