Редукция трехточечной разностной схемы на бесконечном интервале к схеме с конечным числом узлов*

А.И. Задорин, А.В. Чеканов

УДК 519.62

Задорин А.И., Чеканов А.В. Редукция трехточечной разностной схемы на бесконечном интервале к схеме с конечным числом узлов // Сиб. журн. вычисл. математики / РАН. Сиб. отд-ние. — Новосибирск, 2002. — Т. 5, № 2. — С. 149–161.

Рассматривается трехточечная разностная схема с бесконечным числом узлов. Исследуется метод редукции схемы к схеме с конечным числом узлов. Метод основан на выделении многообразия решений, удовлетворяющих предельным условиям на бесконечности. Обсуждаются результаты численных экспериментов.

Zadorin A.I., Chekanov A.V. Reduction of a three-point difference scheme on the infinite interval to a scheme with a finite number of grid nodes // Siberian J. of Numer. Mathematics / Sib. Branch of Russ. Acad. of Sci. — Novosibirsk, 2002. — Vol. 5, № 2. — P. 149–161.

A three-point difference scheme with an infinite number of grid nodes is considered. The method of reduction of such scheme to the scheme with a finite number of grid nodes is investigated. This method is based on the extraction of a set of solutions satisfying the limit conditions on infinity. The results of numerical experiments are discussed.

Введение

При разностной аппроксимации краевых задач на бесконечном интервале возникает разностная схема с бесконечным числом узлов и с предельными условиями на бесконечности. Для численного разрешения такой схемы необходимо редуцировать ее к конечному числу узлов. В данной работе это делается на основе выделения многообразия решений разностного уравнения, удовлетворяющих предельным условиям на бесконечности. Это многообразие будет задаваться в виде двухточечного разностного уравнения, что позволит при фиксированном значении аргумента рассматривать такое уравнение в качестве краевого условия, и тогда разностная схема точным образом сводится к схеме с конечным числом узлов.

Данный подход в случае схемы для полубесконечного интервала исследовался в [1, 2]. В [3] рассматривалось трехточечное разностное уравнение и исследовалось предельное поведение решения при стремлении индекса к бесконечности. Отметим, что подход к переносу краевых условий из особых точек, основанный на выделении всего многообразия решений, удовлетворяющих предельному условию в особой точке, в случае дифференциальных уравнений исследовался в [4, 5], в ряде других работ этих авторов, в [6].

Определим норму ограниченной сеточной функции $\|z^h\| = \max_n |z_n^h|$.

---

*Работа выполнена при финансовой поддержке Российского фонда фундаментальных исследований (грант 01-01-01022).

1. Постановка задачи

Рассмотрим исходную трехточечную разностную схему:

$$L_n^h u^h = A_n u_{n-1}^h - C_n u_n^h + B_n u_{n+1}^h = F_n, \quad -\infty < n < +\infty, \tag{1}$$

$$u_n^h \to 0 \text{ при } n \to \pm\infty. \tag{2}$$

Предполагаем, что при всех n

$$A_n > 0, \qquad B_n > 0, \qquad C_n \geq A_n + B_n + \Delta, \quad \Delta > 0, \tag{3}$$

$$A_n \to A^+, \qquad B_n \to B^+, \qquad C_n \to C^+, \qquad F_n \to 0 \text{ при } n \to +\infty, \tag{4а}$$

$$A_n \to A^-, \qquad B_n \to B^-, \qquad C_n \to C^-, \qquad F_n \to 0 \text{ при } n \to -\infty. \tag{4б}$$

Лемма 1. *Справедлива оценка*

$$\|u^h\| \leq \Delta^{-1}\|F\|.$$

Доказательство. Учитывая условия диагонального преобладания (3), получим, что для оператора L^h с заданными краевыми условиями справедлив принцип максимума [7], и из условий

$$L_n^h \Psi^h \leq 0, \quad \lim_{n\to\pm\infty} \Psi_n^h \geq 0 \tag{5}$$

следует, что $\Psi_n^h \geq 0$ при всех n. Исходя из этого, нетрудно получить утверждение леммы. □

Из леммы 1 следует единственность решения схемы (1), (2).

Цель данной работы – разработать метод редукции схемы (1), (2) к схеме на сетке с конечным числом узлов, что необходимо для численного разрешения этой схемы.

2. Редукция к схеме с конечным числом узлов

Выделим многообразия решений разностного уравнения (1), удовлетворяющих предельным условиям на $\pm\infty$:

$$u_n^h = \alpha_n u_{n-1}^h + \beta_n, \quad n \geq 1, \tag{6а}$$

$$u_n^h = \alpha_n u_{n+1}^h + \beta_n, \quad n \leq -1, \tag{6б}$$

где коэффициенты α_n и β_n зададим как решения двухточечных разностных схем с предельным условием на бесконечности:

$$\begin{gathered} \alpha_n = \frac{A_n}{C_n - B_n\alpha_{n+1}}, \quad n \geq 1, \\ \alpha_n \to \alpha^+, n \to \infty, \quad \alpha^+ = \frac{2A^+}{C^+ + \sqrt{C^+C^+ - 4A^+B^+}}, \end{gathered} \tag{7а}$$

$$\begin{gathered} \alpha_n = \frac{B_n}{C_n - A_n\alpha_{n-1}}, \quad n \leq -1, \\ \alpha_n \to \alpha^-, n \to -\infty, \quad \alpha^- = \frac{2B^-}{C^- + \sqrt{C^-C^- - 4A^-B^-}}, \end{gathered} \tag{7б}$$

$$\beta_n = \frac{B_n\beta_{n+1} - F_n}{C_n - B_n\alpha_{n+1}}, \quad n \geq 1, \quad \beta_n \to 0, \quad n \to +\infty, \tag{8а}$$

$$\beta_n = \frac{A_n\beta_{n-1} - F_n}{C_n - A_n\alpha_{n-1}}, \quad n \leq -1, \quad \beta_n \to 0, \quad n \to -\infty. \tag{8б}$$

Лемма 2. *Задачи* (7а), (7б) *имеют единственное решение.*

Доказательство. Рассмотрим случай схемы (7а). Перепишем уравнение на α_n:

$$\alpha_{n+1}\alpha_n - \frac{C_n}{B_n}\alpha_n + \frac{A_n}{B_n} = 0.$$

Пусть $\xi_n = \alpha_n - \alpha^+$. Тогда

$$\xi_{n+1} = \left(\frac{C_n}{\alpha^+ B_n} - 1\right)\xi_n - \frac{1}{\alpha^+}\xi_n\xi_{n+1} + \left(\frac{C_n}{B_n} - \frac{A_n}{\alpha^+ B_n} - \alpha^+\right). \tag{9}$$

В соответствии с теоремой 1 из [3], уравнение

$$x_{n+1} = c_n x_n + f_n x_n x_{n+1} + g_n$$

имеет единственное решение такое, что $x_n \to 0$ при $n \to \infty$, в случае, если существуют конечные пределы

$$\lim_{n\to\infty} c_n > 1, \qquad \lim_{n\to\infty} g_n = 0,$$

а последовательность $\{f_n\}$ ограничена.

Так как

$$\lim_{n\to\infty}\left(\frac{C_n}{\alpha^+ B_n} - 1\right) > 1, \qquad \lim_{n\to\infty}\left(\frac{C_n}{B_n} - \frac{A_n}{\alpha^+ B_n} - \alpha^+\right) = 0,$$

то в соответствии с теоремой 1 из [3], уравнение (9) имеет единственное решение, удовлетворяющее условию $\lim\limits_{n\to\infty} \xi_n = 0$. Следовательно, задача (7а) имеет, причем единственное, решение. Случай задачи (7б) рассматривается аналогично. □

Лемма 3. *Задачи* (8а), (8б) *имеют единственное решение.*

Доказательство. Рассмотрим случай задачи (8а). Запишем уравнение (8а) в виде

$$\beta_{n+1} = \left(\frac{C_n}{B_n} - \alpha_{n+1}\right)\beta_n + F_n. \tag{10}$$

Поскольку

$$\lim_{n\to\infty}\left(\frac{C_n}{B_n} - \alpha_{n+1}\right) > 1, \quad \lim_{n\to\infty} F_n = 0,$$

то, в соответствии с теоремой 1 из [3], уравнение (10) имеет единственное решение, удовлетворяющее условию $\beta_n \to 0$, $n \to +\infty$. Случай задачи (8б) рассматривается аналогично. □

Итак, в уравнениях (6) коэффициенты α_n и β_n определены однозначно.

Лемма 4. *Существует* $\alpha_{\max}$, *такое, что при всех* n

$$0 < \alpha_n \leq \alpha_{\max} < 1.$$

Доказательство. Рассмотрим случай $n > 0$. Учитывая условие (3), получим:

$$\alpha^+ < \frac{2A^+}{C^+ + |A^+ - B^+| + \Delta} \le \frac{A^+}{A^+ + \Delta} < 1. \qquad (11)$$

Для достаточно больших n ($n \ge N$) в силу предельного условия (7а)

$$\alpha_n \le \frac{A^+}{A^+ + \Delta}.$$

В случае $0 < n < N$ с учетом соотношений (7а), условий (3) и того, что $\alpha_{n+1} < 1$, получим:

$$0 < \alpha_n < \frac{A_n}{A_n + \Delta} \le \alpha_{\max} < 1.$$

Аналогично можно показать, что в случае $n < 0$

$$0 < \alpha_n < \frac{B_n}{B_n + \Delta} \le \alpha_{\max} < 1.$$ □

Лемма 5. *Решения уравнений* (6а), (6б) *удовлетворяют предельным условиям* (2) *соответственно на плюс и минус бесконечности.*

Доказательство. Рассмотрим уравнение (6а). Докажем, что $u_n^h \to 0$, $n \to +\infty$. Учитываем, что $0 < \alpha_{\max} < 1$, $\beta_n \to 0$, $n \to +\infty$. Из (6а) следует, что при всех $n > 0$

$$|u_n^h| \le \alpha_{\max}^n |u_0^h| + \sum_{i=1}^{n} \alpha_{\max}^{n-i} |\beta_i|.$$

Ниже предполагаем, что $u_0^h \ne 0$, так как случай $u_0^h = 0$ рассматривается проще. Пусть

$$S_n = \sum_{i=1}^{n} \alpha_{\max}^{n-i} |\beta_i|.$$

Тогда

$$\forall \varepsilon > 0 \quad \exists N > 0 \quad \forall n > N \quad |\beta_n| < \varepsilon \frac{1 - \alpha_{\max}}{3},$$

$$\forall \varepsilon > 0,\ N > 0 \quad \exists K > N \quad \forall k > K \quad \alpha_{\max}^k < \min\left\{ \frac{\varepsilon}{3|u_0^h|}, \frac{\varepsilon}{3S_N} \alpha_{\max}^N \right\}.$$

Отсюда

$$|u_k^h| \le \alpha_{\max}^k |u_0^h| + \sum_{i=1}^{N} \alpha_{\max}^{k-i} |\beta_i| + \sum_{i=N+1}^{k} \alpha_{\max}^{k-i} |\beta_i| < \frac{\varepsilon}{3} + \alpha_{\max}^{k-N} S_N + \varepsilon \frac{1 - \alpha_{\max}}{3} \sum_{i=N+1}^{k} \alpha_{\max}^{k-i} < \varepsilon.$$

Аналогично можно показать, что в случае уравнения (6б) $u_n^h \to 0$, $n \to -\infty$. □

Определим u_0^h, используя при $n = 0$ в уравнении (1) соотношения (6). Тогда получим

$$u_0^h (A_0 \alpha_{-1} - C_0 + B_0 \alpha_1) = F_0 - A_0 \beta_{-1} - B_0 \beta_1. \qquad (12)$$

Так как $0 < \alpha_{-1}$, $\alpha_1 < 1$, то, учитывая (3), получаем, что

$$A_0 \alpha_{-1} - C_0 + B_0 \alpha_1 \ne 0,$$

откуда следует однозначная разрешимость уравнения (12).

Используя соотношения (6), (12), определим задачу:

$$u_0^h = [F_0 - A_0\beta_{-1} - B_0\beta_1] \;/\; [A_0\alpha_{-1} - C_0 + B_0\alpha_1],$$
$$u_n^h = \alpha_n u_{n+1}^h + \beta_n, \quad n \le -1, \qquad u_n^h = \alpha_n u_{n-1}^h + \beta_n, \quad n \ge 1. \tag{13}$$

Задача (13) соответствует методу встречной прогонки [7] применительно к схеме с бесконечным числом узлов (1), (2). Учитывая, что коэффициенты α_n, β_n из задач (7), (8) определяются однозначно, можно заключить, что решение задачи (13) существует и единственно.

Покажем, что решения задач (1), (2) и (13) совпадают. В силу единственности решения этих задач достаточно показать, что решение задачи (13) удовлетворяет задаче (1), (2). Учитывая соотношения (7), (8), можно показать, что решение задачи (13) удовлетворяет уравнениям (1) при $n \ne 0$. Уравнение (1) при $n = 0$ выполнится на решении задачи (13) в силу уравнения (12) и соотношений (7), (8). Наконец, предельные краевые условия на бесконечности (2) выполнятся в соответствии с леммой 5.

Остановимся на вопросе редукции схемы (1), (2) к разностной схеме с конечным числом узлов. Учитывая соотношения (6), для некоторых $N > 0$ и $M < 0$ перейдем от (1), (2) к разностной схеме

$$L_h^h u^h = A_n u_{n-1}^h - C_n u_n^h + B_n u_{n+1}^h = F_n, \quad M < n < N,$$
$$u_M^h = \alpha_M u_{M+1}^h + \beta_M, \qquad u_N^h = \alpha_N u_{N-1}^h + \beta_N. \tag{14}$$

Учитывая условия диагонального преобладания (3) и то, что $0 \le \alpha_M,\ \alpha_N < 1$, заключаем, что в соответствии с [7, с. 44], для задачи (14) справедлив принцип максимума, вследствие чего ее решение единственно. Как было сказано выше, соотношения (6) справедливы для решения задачи (1), (2), поэтому решение задачи (1), (2) удовлетворяет задаче (14), с учетом единственности решения этих задач совпадают при всех $M \le n \le N$. Таким образом, посредством (14) задача (1), (2) точным образом редуцирована к схеме с конечным числом узлов.

3. Оценки возмущений

Коэффициенты $\alpha_M, \beta_M, \alpha_N, \beta_N$ из задач (7), (8) могут быть вычислены приближенно. Оценим влияние погрешности при их вычислении на решение схемы (14). Перейдем от (14) к разностной схеме с возмущенными α_M, β_M, α_N, β_N:

$$L_n^h \tilde{u}^h = A_n \tilde{u}_{n-1}^h - C_n \tilde{u}_n^h + B_n \tilde{u}_{n+1}^h = F_n, \quad M < n < N,$$
$$\tilde{u}_M^h = \tilde{\alpha}_M \tilde{u}_{M+1}^h + \tilde{\beta}_M, \qquad \tilde{u}_N^h = \tilde{\alpha}_N \tilde{u}_{N-1}^h + \tilde{\beta}_N. \tag{15}$$

Лемма 6. *Пусть*

$$|\alpha_N - \tilde{\alpha}_N| \le \Delta_1, \qquad |\alpha_M - \tilde{\alpha}_M| \le \Delta_1, \quad 0 \le \tilde{\alpha}_N < 1, \quad 0 \le \tilde{\alpha}_M < 1,$$
$$|\beta_N - \tilde{\beta}_N| \le \Delta_2, \qquad |\beta_M - \tilde{\beta}_M| \le \Delta_2.$$

Тогда

$$|u_n^h - \tilde{u}_n^h| \le (1-\tilde{\alpha}_N)^{-1}\Big\{\Delta_1 |u_{N-1}^h| + \Delta_2\Big\} + (1-\tilde{\alpha}_M)^{-1}\Big\{\Delta_1 |u_{M+1}^h| + \Delta_2\Big\},$$
$$M \le n \le N. \tag{16}$$

Доказательство. Определим $z^h = u^h - \tilde{u}^h$. Тогда z^h будет являться решением следующей задачи:

$$
\begin{aligned}
L_n^h z^h &= 0, \quad M < n < N, \\
D_-^h z^h &= z_M^h - \tilde{\alpha}_M z_{M+1}^h = (\alpha_M - \tilde{\alpha}_M) u_{M+1}^h + \beta_M - \tilde{\beta}_M, \\
D_+^h z^h &= z_N^h - \tilde{\alpha}_N z_{N-1}^h = (\alpha_N - \tilde{\alpha}_N) u_{N-1}^h + \beta_N - \tilde{\beta}_N.
\end{aligned} \tag{17}
$$

Для оператора задачи (17) справедлив принцип максимума, в соответствии с которым из условий

$$L_n^h \Psi^h \le 0, \;\; M < n < N, \qquad D_\pm^h \Psi^h \ge 0 \tag{18}$$

следует, что $\Psi_n^h \ge 0$ при всех $M \le n \le N$.

В самом деле, допустим, что для некоторого индекса m функция $\Psi_m^h < 0$. Без ограничения общности можно считать, что индексу m соответствует глобальный минимум функции Ψ_n^h. Если $M < m < N$, то

$$L_m^h \Psi^h = A_m \Psi_{m-1}^h - C_m \Psi_m^h + B_m \Psi_{m+1}^h \ge \Psi_m^h (A_m - C_m + B_m) > 0,$$

что противоречит (18). Рассмотрим случай $m = N$. Тогда

$$D_+^h \Psi^h = (1 - \tilde{\alpha}_N) \Psi_N^h + \tilde{\alpha}_N (\Psi_N^h - \Psi_{N-1}^h) < 0,$$

что противоречит (18). Случай $m = M$ рассматривается, как и случай $m = N$. Итак, для оператора L^h с соответствующими краевыми условиями справедлив принцип максимума.

Определим сеточную функцию Ψ^h:

$$\Psi_n^h = (1 - \tilde{\alpha}_N)^{-1} \Big\{ \Delta_1 |u_{N-1}^h| + \Delta_2 \Big\} + (1 - \tilde{\alpha}_M)^{-1} \Big\{ \Delta_1 |u_{M+1}^h| + \Delta_2 \Big\} \pm z_n^h.$$

Нетрудно убедиться, что для этой функции выполнены условия (18). В силу принципа максимума, $\Psi_n^h \ge 0$ при всех $M \le n \le N$. □

Теперь рассмотрим следующую вспомогательную разностную схему:

$$L_n^h z^h = A_n z_{n-1}^h - C_n z_n^h + B_n z_{n+1}^h = 0, \qquad z_{-K}^h = z_{-K}^0, \quad z_K^h = z_K^0, \quad K > 0.$$

Лемма 7. *Пусть*

$$|z_{-K}^0| \le \varepsilon, \qquad |z_K^0| \le \varepsilon, \qquad q = \max_n \left\{ \frac{A_n}{A_n + \Delta}, \frac{B_n}{B_n + \Delta} \right\}, \quad q < 1.$$

Тогда при всех n таких, что $-K \le n \le K$, выполняется неравенство $|z_n^h| \le \varepsilon q^{|n| - K}$.

Доказательство. Определим сеточную функцию

$$\Psi_n^h = \varepsilon q^{|n| - K} \pm z_n^h.$$

Тогда $\Psi_{-K}^h \ge 0$, $\Psi_K^h \ge 0$. Покажем, что при всех n $L_n^h \Psi^h \le 0$. Имеем

$$L_0^h \Psi^h = \varepsilon q^{-K} [A_0 q - C_0 + B_0 q] \le 0.$$

При $n < 0$

$$L_n^h \Psi^h \le \varepsilon q^{-n-K} [A_n q - (A_n + B_n + \Delta) + B_n q^{-1}] \le 0$$

в силу того, что при выполнении условия $1 > q \geq B_n/(B_n + \Delta)$ справедливо

$$\frac{S_n - \sqrt{S_n^2 - 4A_nB_n}}{2A_n} \leq q \leq \frac{S_n + \sqrt{S_n^2 - 4A_nB_n}}{2A_n}, \quad S_n = A_n + B_n + \Delta.$$

В случае $n > 0$ можно аналогичным образом показать, что $L_n^h\Psi^h \leq 0$. Итак, $L_n^h\Psi^h \leq 0$ при всех n. В силу принципа максимума, $\Psi_n^h \geq 0$ при всех n. □

Для дальнейших рассуждений нам понадобятся следующие неравенства:

$$C_n - B_n - B_n\alpha_{n+1} \geq \Delta, \quad n \geq N, \ N > 0, \tag{19а}$$

$$C_n - A_n - A_n\alpha_{n-1} \geq \Delta, \quad n \leq M, \ M < 0. \tag{19б}$$

Лемма 8. *Пусть при $n \geq N$, $N > 0$*

$$A_n \geq B_n \quad \textit{или} \quad \frac{A_{n+1}}{A_n} - \frac{B_{n+1}}{B_n} \leq \frac{\Delta}{B_n}. \tag{20}$$

Тогда при $n \geq N$ справедливо неравенство (19а).

Пусть при $n \leq M$, $M < 0$

$$B_n \geq A_n \quad \textit{или} \quad \frac{B_{n-1}}{B_n} - \frac{A_{n-1}}{A_n} \leq \frac{\Delta}{A_n}. \tag{21}$$

Тогда при $n \leq M$ выполнится (19б).

Доказательство. Рассмотрим случай $n \geq N$. Пусть $A_n \geq B_n$. Тогда получим неравенство (19а), если учтем условия (3) и то, что $0 < \alpha_n < 1$.

Пусть теперь выполнено второе условие в (20). Для доказательства достаточно показать, что при $n \geq N$

$$\alpha_n \leq \frac{A_n}{B_n + \Delta}. \tag{22}$$

Действительно, в этом случае, учитывая (7а), получим

$$C_n - B_n - B_n\alpha_{n+1} = \frac{A_n}{\alpha_n} - B_n \geq \Delta.$$

Теперь докажем неравенство (22). Сначала покажем, что

$$\alpha^+ < \frac{A^+}{B^+ + \Delta}. \tag{23}$$

В силу условия диагонального преобладания (3),

$$\alpha^+ = \frac{2A^+}{C^+ + \sqrt{C^+C^+ - 4A^+B^+}} < \frac{2A^+}{A^+ + B^+ + |A^+ - B^+| + 2\Delta}.$$

Рассматривая в этом неравенстве случаи $A^+ \geq B^+$ и $A^+ < B^+$, убеждаемся в справедливости (23). Следовательно, неравенство (22) справедливо при достаточно больших n $(n \geq K)$. Рассмотрим теперь случай $N \leq n < K$. В этом случае воспользуемся индукцией по n. Пусть (22) справедливо для $n = k + 1$. Докажем, что оно справедливо для $n = k$. С учетом (7а) и предположения при $n = k + 1$, получим

$$\alpha_k = \frac{A_k}{C_k - B_k\alpha_{k+1}} \leq \frac{A_k(B_{k+1} + \Delta)}{C_k(B_{k+1} + \Delta) - B_kA_{k+1}}.$$

С учетом (3) выводим

$$\alpha_k \le \frac{A_k(B_{k+1}+\Delta)}{(B_{k+1}+\Delta)(A_k+B_k+\Delta)-B_kA_{k+1}}. \tag{24}$$

Учитывая второе неравенство в (20), получим

$$(B_{k+1}+\Delta)A_k - B_kA_{k+1} \ge 0.$$

Теперь из (24) следует требуемое неравенство (22) при $n = k$. Это завершает доказательство (20). Вторая часть леммы доказывается аналогично. □

Следующие две леммы являются обобщением результатов [1] на случай схемы с бесконечным числом узлов.

Лемма 9. *Пусть при $n \ge N$ справедливы ограничения* (19а). *Тогда*

$$\max_{n\ge N}|\beta_n| \le \Delta^{-1}\max_{n\ge N}|F_n|. \tag{25}$$

Если при $n \le M$ имеет место (19б), *то*

$$\max_{n\le M}|\beta_n| \le \Delta^{-1}\max_{n\le M}|F_n|. \tag{26}$$

Остановимся на получении оценки (25). Задачу (8а) можно записать в виде

$$B_n(\beta_{n+1}-\beta_n) - [C_n - B_n - B_n\alpha_{n+1}]\beta_n = F_n, \quad \beta_n \to 0, \ n \to +\infty. \tag{27}$$

Учитывая ограничение (19а), используя принцип максимума применительно к задаче (27), теперь несложно получить оценку (25). Оценка (26) может быть получена аналогично, что доказывает лемму.

Исследуем, как влияет возмущение коэффициентов схемы (1), (2) на решения задач (7), (8).

Лемма 10. *Пусть коэффициенты схемы* (1), (2) *возмущены, при всех $n \le M$ и $n \ge N$*

$$\begin{aligned} &|A_n-\tilde A_n| \le \sigma, \quad &&|B_n-\tilde B_n| \le \sigma, \quad &&|C_n-\tilde C_n| \le \sigma,\\ &\tilde A_n > 0, &&\tilde B_n > 0, &&\tilde C_n \ge \tilde A_n+\tilde B_n+\tilde\Delta, \quad \tilde\Delta > 0,\\ &\tilde A_n \to \tilde A^+, &&\tilde B_n \to \tilde B^+, &&\tilde C_n \to \tilde C^+ \ \textit{при}\ n\to+\infty,\\ &\tilde A_n \to \tilde A^-, &&\tilde B_n \to \tilde B^-, &&\tilde C_n \to \tilde C^- \ \textit{при}\ n\to-\infty. \end{aligned} \tag{28}$$

Пусть $\tilde\alpha$, $\tilde\beta$ являются решением задач (7), (8) *в случае возмущенных коэффициентов $\tilde A_n$, $\tilde B_n$, $\tilde C_n$, $\tilde F_n$.*

Пусть выполнены условия (19а) *и* (19б) *как для коэффициентов A_n, B_n, C_n, α_n, так и для коэффициентов $\tilde A_n$, $\tilde B_n$, $\tilde C_n$, $\tilde\alpha_n$. Тогда для некоторой постоянной C, не зависящей от σ, при всех $n \le M$ и $n \ge N$*

$$|\alpha_n-\tilde\alpha_n| \le C\sigma, \quad |\beta_n-\tilde\beta_n| \le C\sigma.$$

Доказательство леммы можно провести на основе принципа максимума по аналогии с тем, как в случае схемы для полубесконечного интервала это сделано в [1].

4. Нахождение коэффициентов в краевых условиях

Итак, при выполнении условий (19) задачи (7) и (8) устойчивы к возмущению коэффициентов исходной схемы (1), (2). Ниже предлагается, как найти приближенным образом решения задач (7) и (8) при достаточно больших по модулю значениях n. При этом предполагается, что коэффициенты схемы (1) разложимы в ряд по степеням n^{-i}.

Пусть при достаточно больших n ($n \geq N$) до некоторого $r > 0$ справедливы разложения:

$$A_n = \sum_{k=0}^{r} \frac{A_+^{(k)}}{n^k} + O\left(\frac{1}{n}\right)^{r+1}, \qquad C_n = \sum_{k=0}^{r} \frac{C_+^{(k)}}{n^k} + O\left(\frac{1}{n}\right)^{r+1},$$

$$B_n = \sum_{k=0}^{r} \frac{B_+^{(k)}}{n^k} + O\left(\frac{1}{n}\right)^{r+1}, \qquad F_n = \sum_{k=0}^{r} \frac{F_+^{(k)}}{n^k} + O\left(\frac{1}{n}\right)^{r+1}.$$

Тогда при $n \geq N$ α_n и β_n из (7a), (8a) можно искать в виде:

$$\tilde{\alpha}_n^p = \sum_{k=0}^{p} \frac{\alpha_+^{(k)}}{n^k}, \qquad \tilde{\beta}_n^p = \sum_{k=0}^{p} \frac{\beta_+^{(k)}}{n^k}, \quad p \leq r. \tag{29}$$

Запишем соотношение

$$\left(\frac{1}{n+1}\right)^k = \sum_{i=0}^{p} \gamma_i^k \frac{1}{n^i} + O\left(\frac{1}{n}\right)^{p+1}, \quad k \geq 0. \tag{30}$$

Вследствие разложения

$$\frac{1}{n+1} = \frac{1}{n} - \frac{1}{n^2} + \frac{1}{n^3} - \ldots + (-1)^{p+1}\frac{1}{n^p} + O\left(\frac{1}{n}\right)^{p+1}$$

коэффициенты γ_i^k определяются следующим образом:

$$\gamma_0^0 = 1, \qquad \gamma_i^0 = 0, \qquad \gamma_0^1 = 0, \qquad \gamma_i^1 = (-1)^{i-1}, \quad i > 0,$$

$$\gamma_i^{k+1} = 0 \ \text{ при } \ i \leq k, \qquad \gamma_{k+i}^{k+1} = \sum_{j=1}^{i} (-1)^{j-1} \gamma_{k+i-j}^k \ \text{ при } \ i > 0, \ k > 0.$$

Подставляя приведенные выше разложения в (7a), (8a) и приводя коэффициенты, стоящие при одинаковых степенях n, получим рекуррентные формулы относительно коэффициентов $\alpha_+^{(i)}$ и $\beta_+^{(i)}$:

$$\alpha_+^{(k)} = \frac{1}{C^+ - 2\alpha^+ B^+}\left[A_+^{(k)} - \alpha^+ C_+^{(k)} - \sum_{i=1}^{k-1} \alpha_+^{(i)} \left(C_+^{(k-i)} - \sum_{j=0}^{k-i} \sum_{l=0}^{k-i-j} \gamma_{k-i-j}^l B_+^{(j)} \alpha_+^{(l)}\right) + \right.$$

$$\left. \alpha^+ \left(\sum_{j=1}^{k} \sum_{l=0}^{k-j} \gamma_{k-j}^l B_+^{(j)} \alpha_+^{(l)} + B^+ \sum_{l=0}^{k-1} \gamma_k^l \alpha_+^{(l)}\right)\right], \quad k \geq 1, \ \alpha_+^{(0)} = \alpha^+,$$

$$\beta_+^{(k)} = \frac{-1}{C^+ - B^+ - B^+\alpha^+}\left[F_+^{(k)} - \sum_{l=1}^{k-1} \sum_{i=1}^{k-l} \gamma_{k-l}^i B_+^{(l)} \beta_+^{(i)} - B^+ \sum_{l=1}^{k-1} \gamma_k^l \beta_+^{(l)} + \right.$$

$$\left. \sum_{l=1}^{k-1} \beta_+^{(l)} \left(C_+^{(k-l)} - \sum_{j=0}^{k-l} \sum_{i=0}^{k-l-j} \gamma_{k-l-j}^i B_+^{(j)} \alpha_+^{(i)}\right)\right], \quad k \geq 1, \ \beta_+^{(0)} = 0.$$

Аналогично, пусть при $n \le M$, $M < 0$, для некоторого r справедливы разложения:

$$A_n = \sum_{i=0}^{r} \frac{A_-^{(i)}}{n^i} + O\Big(\frac{1}{n}\Big)^{r+1}, \qquad C_n = \sum_{i=0}^{r} \frac{C_-^{(i)}}{n^i} + O\Big(\frac{1}{n}\Big)^{r+1},$$

$$B_n = \sum_{i=0}^{r} \frac{B_-^{(i)}}{n^i} + O\Big(\frac{1}{n}\Big)^{r+1}, \qquad F_n = \sum_{i=0}^{r} \frac{F_-^{(i)}}{n^i} + O\Big(\frac{1}{n}\Big)^{r+1}.$$

Тогда при $n \le M$, α_n и β_n из (7б), (8б) будем искать в виде:

$$\tilde{\alpha}_n^p = \sum_{k=0}^{p} \frac{\alpha_-^{(k)}}{n^k}, \qquad \tilde{\beta}_n^p = \sum_{k=0}^{p} \frac{\beta_-^{(k)}}{n^k}, \quad p \le r. \tag{31}$$

Запишем соотношение

$$\Big(\frac{1}{n-1}\Big)^k = \sum_{i=0}^{p} \omega_i^k \frac{1}{n^i} + O\Big(\frac{1}{n}\Big)^{p+1}, \quad k \ge 0. \tag{32}$$

Вследствие разложения

$$\frac{1}{n-1} = \frac{1}{n} + \frac{1}{n^2} + \frac{1}{n^3} + \ldots + \frac{1}{n^p} + O\Big(\frac{1}{n}\Big)^{p+1}$$

коэффициенты ω_i^k определяются следующим образом:

$$\omega_0^0 = 1, \qquad \omega_i^0 = 0, \qquad \omega_0^1 = 0, \qquad \omega_i^1 = 1, \quad i > 0,$$

$$\omega_i^{k+1} = 0 \ \text{ при } \ i \le k, \quad \omega_{k+i}^{k+1} = \sum_{j=1}^{i} \omega_{k+i-j}^k \ \text{ при } \ i > 0, \ k > 0.$$

Тогда

$$\alpha_-^{(k)} = \frac{1}{C^- - 2\alpha^- A^-} \Bigg[B_-^{(k)} - \alpha^- C_-^{(k)} - \sum_{i=1}^{k-1} \alpha_-^{(i)} \Big(C_-^{(k-i)} - \sum_{j=0}^{k-i} \sum_{l=0}^{k-i-j} \omega_{k-i-j}^l A_-^{(j)} \alpha_-^{(l)} \Big) +$$

$$\alpha^- \Big(\sum_{j=1}^{k} \sum_{l=0}^{k-j} \omega_{k-j}^l A_-^{(j)} \alpha_-^{(l)} + A^- \sum_{l=0}^{k-1} \omega_k^l \alpha_-^{(l)} \Big) \Bigg], \quad k \ge 1, \ \alpha_-^{(0)} = \alpha^-.$$

$$\beta_-^{(k)} = \frac{-1}{C^- - A^- - A^- \alpha^-} \Bigg[F_-^{(k)} - \sum_{l=1}^{k-1} \sum_{i=1}^{k-l} \omega_{k-l}^i A_-^{(l)} \beta_-^{(i)} - A^- \sum_{l=1}^{k-1} \omega_k^l \beta_-^{(l)} +$$

$$\sum_{l=1}^{k-1} \beta_-^{(l)} \Big(C_-^{(k-l)} - \sum_{j=0}^{k-l} \sum_{i=0}^{k-l-j} \omega_{k-l-j}^i A_-^{(j)} \alpha_-^{(i)} \Big) \Bigg], \quad k \ge 1, \ \beta_-^{(0)} = 0.$$

При нахождении $\tilde{\alpha}_n^p$ и $\tilde{\beta}_n^p$ по формулам (29) и (31) коэффициенты схемы (1), (2) приближаются с погрешностью порядка $O(|n|^{-(p+1)})$, поэтому при $n \ge N$ и $n \le M$ при достаточно больших $|M|$ и N выполнятся условия (28) с $\sigma = C[|M|^{-(p+1)} + N^{-(p+1)}]$. В соответствии с леммой 10 при выполнении условий (19а), (19б) при $n \le M$ и $n \ge N$ для некоторой постоянной C_1, не зависящей от N и M

$$|\alpha_n - \tilde{\alpha}_n|, \ |\beta_n - \tilde{\beta}_n| \le C_1[|M|^{-(p+1)} + N^{-(p+1)}]. \tag{33}$$

Рассмотрим снова редуцированную к конечному числу узлов задачу (14). Если коэффициенты α_N и β_N находить по формуле (29), а α_M и β_M по формуле (31), то погрешность в вычислении этих коэффициентов соответствует оценке (33). В соответствии с леммой 6 при всех $M \le n \le N$ для некоторой постоянной C_2

$$|u_n^h - \tilde{u}_n^h| \le C_2[|M|^{-(p+1)} + N^{-(p+1)}]. \tag{34}$$

Таким образом, увеличивая число членов разложений в (29) и (31), разностную схему (1), (2) можно редуцировать к схеме (14) с заданным числом узлов с заранее определенной точностью.

5. Численные эксперименты

Остановимся на результатах численных экспериментов. Точное решение задачи (1), (2) неизвестно, поэтому для достаточно большого K решим вспомогательную задачу

$$A_n\tilde{u}_{n-1}^h - C_n\tilde{u}_n^h + B_n\tilde{u}_{n+1}^h = F_n, \quad \tilde{u}_{-K}^h = 0, \quad \tilde{u}_K^h = 0. \tag{35}$$

В редуцированной схеме (14) принималось $M = -N$, причем $N \ll K$. В соответствии с леммой 7 при $-N \le n \le N$

$$|u_n^h - \tilde{u}_n^h| \le \max\{|u_{-K}^h|, \quad |u_K^h|\}q^{N-K}, \quad q < 1.$$

Из этой оценки следует, что при $N \ll K$ на конечной сетке при $-N \le n \le N$ решения задач (1), (2) и (35) достаточно близки, чтобы в численных экспериментах решение задачи (35) можно было принять в качестве решения задачи (1), (2).

В численных экспериментах предполагалось, что $K = 5000$ и $N \le 1000$. Сравнивалось пять способов задания краевых условий при переходе к схеме с конечным числом узлов:

1) $u_{\pm N}^h = 0$;
2) $u_N^h = u_{N-1}^h$, $u_{-N}^h = u_{-N+1}^h$;
3) в (14) $\tilde{\alpha}_{\pm N} = \tilde{\alpha}_{\pm N}^0$, $\tilde{\beta}_{\pm N} = \tilde{\beta}_{\pm N}^0$;
4) в (14) $\tilde{\alpha}_{\pm N} = \tilde{\alpha}_{\pm N}^1$, $\tilde{\beta}_{\pm N} = \tilde{\beta}_{\pm N}^1$;
5) в (14) $\tilde{\alpha}_{\pm N} = \tilde{\alpha}_{\pm N}^2$, $\tilde{\beta}_{\pm N} = \tilde{\beta}_{\pm N}^2$,

где

$$\tilde{\alpha}_N^0 = \alpha^+, \qquad \tilde{\alpha}_{-N}^0 = \alpha^-, \qquad \tilde{\alpha}_N^1 = \alpha^+ + \frac{\alpha_+^{(1)}}{N}, \qquad \tilde{\alpha}_{-N}^1 = \alpha^- - \frac{\alpha_-^{(1)}}{N},$$

$$\alpha_+^{(1)} = \frac{A_+^{(1)} - \alpha^+C_+^{(1)} + \alpha^+B_+^{(1)}\alpha^+}{C^+ - 2\alpha^+B^+}, \qquad \alpha_-^{(1)} = \frac{B_-^{(1)} - \alpha^-C_-^{(1)} + \alpha^-A_-^{(1)}\alpha^-}{C^- - 2\alpha^-A^-},$$

$$\tilde{\beta}_N^0 = \tilde{\beta}_{-N}^0 = 0, \quad \tilde{\beta}_N^1 = \frac{\beta_+^{(1)}}{N}, \quad \tilde{\beta}_{-N}^1 = -\frac{\beta_-^{(1)}}{N},$$

$$\beta_+^{(1)} = \frac{-F_+^{(1)}}{C^+ - B^+ - B^+\alpha^+}, \quad \beta_-^{(1)} = \frac{-F_-^{(1)}}{C^- - A^- - A^-\alpha^-},$$

коэффициенты $\tilde{\alpha}_{\pm N}^2$, $\tilde{\beta}_{\pm N}^2$ вычисляются аналогичным образом по формулам (29), (31), но имеют более сложный вид.

Вычислялась норма погрешности

$$s = \max_n |\tilde{u}_n^h - u_n^h|$$

в зависимости от N, где u^h – решение схемы (1), (2), $\tilde{u}^h$ – испытываемой схемы, решение которой зависит от способа задания краевых условий.

Рассмотрим схему (1), (2) со следующими коэффициентами:

$$A_n = \begin{cases} 2 + \dfrac{3}{n} + \dfrac{4}{n^2} & \text{при } n > 0, \\ 2 & \text{при } n = 0, \\ 1 + \dfrac{2}{n} + \dfrac{4}{n^2} & \text{при } n < 0, \end{cases} \qquad B_n = \begin{cases} 1 + \dfrac{2}{n} + \dfrac{4}{n^2} & \text{при } n > 0, \\ 2 & \text{при } n = 0, \\ 2 + \dfrac{2}{n} + \dfrac{4}{n^2} & \text{при } n < 0, \end{cases}$$

$$F_n = \begin{cases} \dfrac{1}{n} + \dfrac{1}{n^2} & \text{при } n > 0, \\ 1 & \text{при } n = 0, \\ -\dfrac{2}{n} + \dfrac{1}{n^2} & \text{при } n < 0, \end{cases} \qquad C_n = A_n + B_n + 1.$$

В этом случае неравенство (19а) выполняется для всех $n > 0$, а неравенство (19б) верно при всех $n < 0$.

В табл. 1 приведено s в зависимости от способа задания краевого условия и N.

Теперь рассмотрим дифференциальную краевую задачу

$$u'' - a(x)u' - b(x)u = f(x), \quad u(x) \to 0, \ x \to \pm\infty. \tag{36}$$

Применяя к (36) схему направленных разностей, получим схему вида (1)-(2) с коэффициентами

$$A_n = \frac{1}{h^2} + \frac{a(nh)}{h}, \qquad B_n = \frac{1}{h^2}, \qquad C_n = A_n + B_n + b(nh), \qquad F_n = f(nh). \tag{37}$$

Зададим

$$a(x) = 1 + \frac{1}{x^2+1}, \qquad b(x) = 2 + \frac{1}{x^2+x+1}, \qquad f(x) = \frac{1}{|x|+1}.$$

В этом случае при $n > 0$ будет выполнено условие (19а), при $n < 0$ выполняется условие (19б). В численных экспериментах задавалось $h = 1$.

В табл. 2 приведена норма погрешности s в зависимости от способа переноса краевых условий схемы (1), (2) в случае, когда коэффициенты схемы заданы в соответствии с (37).

Результаты вычислений подтверждают оценку погрешности (34), имеющую место при предлагаемом способе перехода к схеме с конечным числом узлов.

Таблица 1

Способ переноса условия	$N = 10$	$N = 100$	$N = 1000$
$u_{\pm N}^h = 0$	0.26	0.20E−1	0.20E−2
$u_{\pm N}^h = u_{\pm(N-1)}^h$	0.54E−1	0.29E−3	0.28E−5
В (14) $\tilde{\alpha}_{\pm N}^0$, $\tilde{\beta}_{\pm N}^0$	0.98E−1	0.10E−1	0.10E−2
В (14) $\tilde{\alpha}_{\pm N}^1$, $\tilde{\beta}_{\pm N}^1$	0.47E−2	0.39E−4	0.38E−6
В (14) $\tilde{\alpha}_{\pm N}^2$, $\tilde{\beta}_{\pm N}^2$	0.50E−3	0.56E−6	0.58E−9

Таблица 2

Способ переноса условия	$N = 10$	$N = 100$	$N = 1000$
$u_{\pm N}^h = 0$	0.48E−1	0.50E−2	0.50E−3
$u_{\pm N}^h = u_{\pm(N-1)}^h$	0.75E−2	0.87E−4	0.89E−6
В (14) $\tilde{\alpha}_{\pm N}^0$, $\tilde{\beta}_{\pm N}^0$	0.37E−1	0.42E−2	0.43E−3
В (14) $\tilde{\alpha}_{\pm N}^1$, $\tilde{\beta}_{\pm N}^1$	0.64E−2	0.75E−4	0.77E−6
В (14) $\tilde{\alpha}_{\pm N}^2$, $\tilde{\beta}_{\pm N}^2$	0.13E−2	0.17E−5	0.19E−8

Литература

[1] **Задорин А.И.** Трехточечная разностная схема на полубесконечном интервале // Вычислительные технологии. — 2000. — Т. 1, № 2. — С. 46–55.

[2] **Задорин А.И.** Редукция краевой задачи для линейного векторного разностного уравнения второго порядка к конечному числу узлов // Журн. вычисл. матем. и мат. физики. — 2000. — Т. 40, № 4. — С. 546–556.

[3] **Balla K.** On asymptotic behavior of solutions to some difference equations. Advances in difference equations // Proc. Sec. Int. Conf. on Difference Equations, Veszprem, Hungary, 1995. — Gordon & Breach, 1997. — P. 67–80.

[4] **Абрамов А.А.** О переносе условия ограниченности для некоторых систем обыкновенных линейных дифференциальных уравнений // Журн. вычисл. матем. и мат. физ. — 1961. — Т. 1, № 4. — С. 733–737.

[5] **Абрамов А.А., Балла К., Конюхова Н.Б.** Перенос граничных условий из особых точек для систем обыкновенных дифференциальных уравнений // Сообщ. по вычисл. матем. — М.: ВЦ АН СССР, 1981.

[6] **Задорин А.И.** Перенос краевого условия из бесконечности при численном решении уравнений второго порядка с малым параметром // Сиб. журн. вычислител. математики / РАН. Сиб. отд-ние. — Новосибирск, 1999. — Т. 2, № 1. — С. 21–35.

[7] **Самарский А.А.** Теория разностных схем. — М.: Наука, 1989.

А.И. Задорин
644099, Омск,
ул. Певцова, 13,
Омский филиал ИМ СО РАН
E-mail: zadorin@iitam.omsk.net.ru

Статья поступила
4 мая 2001 г.
Переработанный вариант
26 июня 2001 г.

А.В. Чеканов
644077, Омск,
просп. Мира, 55а,
государственный университет
E-mail: andy@omskplast.com