УДК 519.632

ЧИСЛЕННОЕ РЕШЕНИЕ КРАЕВОЙ ЗАДАЧИ ДЛЯ СИСТЕМЫ УРАВНЕНИЙ С МАЛЫМ ПАРАМЕТРОМ

А.И.Задорин
(Омск)
(ЖВМ и МФ, 1998, т. 38, № 8, с. 1255-1265)

Рассматривается нелинейная система уравнений второго порядка с малыми параметрами при старших производных. Наложены два вида ограничений на матрицу Якоби, при которых решение задачи существует и единственно. Построена разностная схема, основанная на замене коэффициентов на кусочно-постоянные, и при накладываемых ограничениях обоснована ее равномерная сходимость с первым порядком. В случае слабо выраженного погранслоя обоснована равномерная сходимость схемы направленных разностей.

Рассмотрим исходную краевую задачу :

$$T_\epsilon u = -\epsilon u'' + a(x)u' + F(x,u) = 0, \tag{1}$$

$$u(0) = A, R_\epsilon u = \delta u(1) + \epsilon\beta u'(1) = B, \tag{2}$$

где $a(x), \delta, \beta$ - диагональные квадратные матрицы порядка N с диагональными элементами соответственно $a_i(x), \delta_i, \beta_i$ $i = 1, 2, ..., N$, $A.B$ - векторы из N компонент, ϵ -числовой параметр, $\epsilon > 0$, F - известная вектор-функция, $u(x)$- вектор-функция решения. Предполагается, что при всех $i = 1, 2, \ldots, N$ $a_i \in C^1[0,1]$, $F_i \in C^1([0,1] \times R)$,

$$a_i(x) \geq \alpha_i > 0,\ \delta_i \geq 0, \beta_i \geq 0, \delta_i + \beta_i > 0,\ \alpha_0 = \min_i \alpha_i. \tag{3}$$

Дополнительные ограничения на F будем рассматривать отдельно.

Задача (1)-(2) является модельной, например, при описании переноса примеси с учетом диффузии и химических реакций. В случае одного уравнения задача (1)-(2) рассматривалась в [1]. В случае $a(x) = 0$ система уравнений рассматривалась, например, в [2]. Всюду ниже под и C_i, будем понимать положительные постоянные, не зависящие от ϵ и шагов разностной сетки. Определим используемые нормы :

для функции $q(x)$: $\|q\| = \max |q(x)|, x \in I, I = [0,1]$, для вектор-функции $q(x)$ из N компонент

$$\|q\|_N = \max_{1 \le i \le N} \max_{x \in I} |q_i(x)|,$$

для вектора q^h $\|q^h\|_\infty = \max_i |q_i^h|$,

для сеточной вектор-функции q^h

$$\|q^h\|_{N\Omega} = \max_{1 \le i \le N} \max_{x \in \Omega} |q_i^h(x)|.$$

Под неравенством векторов понимаем соответствующее покомпонентное неравенство. Определим $Q^m[0,1]$ как множество функций интервала $[0,1]$, имеющих кусочно-непрерывные производные вплоть до порядка m, причем разрывы могут быть только первого рода в заданном конечном множестве внутренних точек.

1 Анализ дифференциальной задачи

Рассмотрим вспомогательную линейную краевую задачу :

$$Lu = -\epsilon u'' + a(x)u' + G(x)u = F(x), u(0) = A, \ R_\epsilon u = B, \tag{1.1}$$

где $(x), G(x)$- квадратные матрицы порядка N, предполагаются справедливыми ограничения (3).

Лемма 1. Пусть при всех x, i

$$G_{ii}(x) \ge \eta > 0, \sum_{j \ne i} |G_{ij}(x)| \le (1-\sigma) G_{ii}(x), \ 0 < \sigma < 1. \tag{1.2}$$

Тогда :

$$\|u\|_N \le \frac{1}{\sigma} \left[\frac{\|F\|_N}{\eta} + \|A\|_\infty + \max_i \left| \frac{B_i}{\delta_i + \alpha_i \beta_i} \right| \right].$$

Доказательство. Рассмотрим скалярную линейную задачу :

$$L_0 V = -\epsilon V'' + d(x)V' + b(x)V = f(x), \ V(0) = A_0, \ \delta_0 V(1) + \epsilon \beta_0 V'(1) = B_0,$$

где $b(x) > 0, \epsilon > 0, d(x) \ge d_0 > 0, \ x \in I$, $b, d, f \in C[0,1]$. Покажем, что

$$|V(x)| \le \|\frac{f}{b}\| + |A_0| + \frac{|B_0|}{\delta_0 + d_0 \beta_0} \exp[d_0 \epsilon^{-1}(x-1)]. \tag{1.3}$$

При наложенных ограничениях для оператора L_0 справедлив принцип максимума и если для некоторой $\Psi(x) \in C^2[0,1]$

$$\Psi(0) \geq 0, \delta_0\Psi(1) + \epsilon\beta_0 u'(1) \geq 0, L_0\Psi(x) \geq 0, x \in I, \tag{1.4}$$

то $\Psi(x) \geq 0$ при всех $x \in I$. Определим :

$$\Psi(x) = \|\frac{f}{b}\| + |A_0| + \frac{|B_0|}{\delta_0 + d_0\beta_0}\exp[d_0\epsilon^{-1}(x-1)] \pm V(x).$$

При таком выборе $\Psi(x)$ выполнены соотношения (1.4) и поэтому

$\Psi(x) \geq 0, x \in I$. Это доказывает оценку (1.3).

Уравнение (1.1) для компоненты i запишем в виде:

$$-\epsilon u_i'' + a_i(x)u_i' + G_{ii}(x)u_i = F_i(x) - \sum_{j \neq i} G_{ij}u_j$$

В силу оценки (1.3) имеем :

$$|u_i(x)| \leq \eta^{-1}\|F_i\| + \left\| G_{ii}^{-1}\sum_{j\neq i} G_{ij}u_j \right\| +$$

$$+|B_i|(\delta_i + \alpha_i\beta_i)^{-1}\exp[\alpha_i\epsilon^{-1}(x-1)] + |A_i|.$$

Учитывая условия (1.2), придем к утверждению леммы.

Получим оценку устойчивости при других ограничениях на матрицу $G(x)$.

Лемма 2. Пусть в (1.1) $G_{ij} \leq 0$ при $i \neq j$. Пусть найдется вектор-функция $\phi(x)$ с компонентами из $C^2[0,1]$, такая,что

$$\phi(x) > 0,\ \ L\phi(x) > 0, x \in I,\ \ R_\epsilon\phi > 0. \tag{1.5}$$

Тогда, если для некоторой вектор-функции $\Psi(x)$ с компонентами из $C^2[0,1]$

$$\Psi(0) \geq 0, R_\epsilon\Psi \geq 0, L\Psi(x) \geq 0, x \in I, \tag{1.6}$$

то $\Psi(x) \geq 0,\ x \in I$.

Доказательство. Предположим, что какие-то компоненты вектор-функции $\Psi(x)$ оказались меньше нуля. Определим y : $y_i = \Psi_i/\phi_i$. Тогда при некоторых j_0, x_0 ,будет $y_{j_0}(x_0) = \min y_j(x) < 0$. Покажем, что $x_0 \neq 1$. В силу условий (1.6)

$$[\delta_{j_0}\phi_{j_0}(1) + \epsilon\beta_{j_0}\phi'_{j_0}(1)]y_{j_0}(1) + \epsilon\beta_{j_0}\phi_{j_0}(1)y'_{j_0}(1) \geq 0.$$

Исходя из этого соотношения, легко убедиться, что $x_0 < 1$. Следовательно, x_0- точка локального минимума и поэтому:

$$y_{j_0}(x_0) < 0,\ y'_{j_0}(x_0) = 0,\ y''_{j_0}(x_0) \geq 0. \tag{1.7}$$

Нетрудно убедиться, что

$$L_{j_0}\psi = -\epsilon\phi_{j_0}y''_{j_0} + [-2\epsilon\phi'_{j_0} + a_{j_0}\phi_{j_0}]y'_{j_0} + y_{j_0}L_{j_0}\phi + \sum_{k=1}^{N} G_{j_0k}\phi_k(y_k - y_{j_0}).$$

Учитывая (1.5),(1.7), получим $L_{j_0}\Psi(x_0) < 0$, что противоречит (1.6). Лемма доказана.

*Замечание 1.*Лемма 2 останется в силе, если предположить, что компоненты вектор-функции $\Psi(x)$ из $C^1[0,1] \cap Q^2[0,1]$. При этом если в (1.6) x- точка разрыва второй производной, то условие $L\Psi(x) \geq 0$ должно быть выполнено для правого и левого пределов в этой точке. В случае одного уравнения аналогичное утверждение доказано в [1].

Замечание 2. Условие $G_{i,j}(x) \leq 0$ при $i \neq j$ для выполнения принципа максимума является существенным. В этом можно убедиться, рассмотрев краевую задачу:

$$-\epsilon u''_1 + u'_1 = 0,$$

$$-\epsilon u''_2 + u'_2 + u_1 = 0,$$

$$u_1(0) = 1, u_2(0) = 0, u'_1(1) = 0, u'_2(1) = 0.$$

Если определить $\Psi(x) = (u_1(x), u_2(x)), \phi(x) = (\exp(x), \exp(x))$, то будут выполнены условия (1.5),(1.6), но при определенных x будет $u_2(x) < 0$.

Лемма 3. Пусть для задачи (1.1) в дополнение к условиям (3) при всех x и i выполнены неравенства :

$$\sum_{j=1}^{N} G_{ij}(x) \geq -\eta,\ \eta > 0, \alpha_0^2 - 4\eta\epsilon \geq \gamma > 0,\ G_{ij}(x) \leq 0,\ j \neq i. \tag{1.8}$$

Тогда для оператора L из (1.1) справедлив принцип максимума и для решения задачи (1.1) верна оценка устойчивости :

$$\|u(x)\|_\infty \leq \Gamma(x) = \left[\alpha_0^2(\eta\gamma)^{-1}\|F\|_N + \|A\|_\infty\right]\exp[2\eta\alpha_0^{-1}x] +$$

$$+\max_i |B_i(\delta_i+\alpha_0\beta_i/2)^{-1}| \exp[\alpha_0(2\epsilon)^{-1}(x-1)].$$

Доказательство. Определим вектор-функцию $\phi(x)$:

$\phi_i(x) = \exp[2\eta\alpha_0^{-1}x]$. Нетрудно убедиться, что для вектор-функции $\phi(x)$ справедливы соотношения (1.5). Согласно лемме 2 для L справедлив принцип максимума. Определим $\Psi(x)$: $\Psi_i(x) = \Gamma(x) \pm u_i(x)$. При таком задании $\Psi(x)$ выполнятся неравенства (1.6) и в силу принципа максимума $\Psi(x) \geq 0$. Это доказывает лемму.

Получим оценки устойчивости для исходной задачи (1)-(2). Пусть $G(x,u)$ - матрица Якоби для функции $F(x,u)$ из (1). Пусть p, q - две произвольные вектор-функции с компонентами из $C^1[0,1] \cap Q^2[0,1]$, $z = p - q$. Используя теорему о среднем значении, из (1)-(2) получим:

$$L_\epsilon z = -\epsilon z'' + a(x)z' + G(x,\xi)z = T_\epsilon p - T_\epsilon q,$$

$$z(0) = p(0) - q(0), \; R_\epsilon z = R_\epsilon p - R_\epsilon q.$$

Пусть выполнены ограничения (3),(1.2). Тогда в соответствии с леммой 1

$$\|p-q\|_N \leq \sigma^{-1}[\; \eta^{-1}\|T_\epsilon p - T_\epsilon q\|_N + \|p(0)-q(0)\|_\infty + \\ + \max_i |(R_\epsilon p - R_\epsilon q)_i(\delta_i + \alpha_i\beta_i)^{-1}| \;]. \qquad (1.9)$$

В случае ограничений (3),(1.8) согласно лемме 3

$$\|p_(x) - q_(x)\|_\infty \leq \left[\alpha_0^2(\eta\gamma)^{-1}\|T_\epsilon p - T_\epsilon q\|_N + \|p(0)-q(0)\|_\infty\right] \exp[2\eta\alpha_0^{-1}x] + \\ + \max_i |(R_\epsilon p - R_\epsilon q)_i[\delta_i + \alpha_0\beta_i/2]^{-1}| \exp[\alpha_0(2\epsilon)^{-1}(x-1)]. \qquad (1.10)$$

Задавая в (1.9) или (1.10) $p = u, q = 0$, получим оценку устойчивости для решения задачи (1)-(2):

$$\|u\|_N \leq C[\|F(x,0)\|_N + \|A\|_\infty + \|B\|_\infty] \;. \qquad (1.11)$$

Из оценок (1.9) и (1.10) следует единственность решения задачи (1), (2). Согласно [3] решение задачи (1)-(2) существует, если найдутся нижнее и верхнее решения $\tilde{\alpha}, \; \tilde{\beta}$, для которых

$$T_\epsilon\tilde{\alpha} \leq 0, \; T_\epsilon\tilde{\beta} \geq 0, \; \tilde{\alpha}(0) \leq A \leq \tilde{\beta}(0), \; R_\epsilon\tilde{\alpha} \leq B \leq R_\epsilon\tilde{\beta}. \qquad (1.12)$$

В случае условий (1.8) определим вектор-функцию $\tilde{\alpha}(x)$ с компонентами

$$\tilde{\alpha}_i(x) = -\{[\alpha_0^2(\eta\gamma)^{-1}\|F(x,0)\|_N + \|A\|_\infty] \exp[2\eta\alpha_0^{-1}x] +$$

$$+\max_i |B_i(\delta_i + 0.5\alpha_0\beta_i)^{-1}| \exp[\alpha_0(2\epsilon)^{-1}(x-1)]\}, \tilde\beta(x) = -\tilde\alpha(x).$$

В случае условий (1.2) определим

$$\tilde\alpha_i(x) = -\sigma^{-1}\{\eta^{-1}\|F(x,0)\|_N + \|A\|_\infty + \max_i |B_i(\delta_i+\alpha_0\beta_i)^{-1}| \exp[\alpha_0\epsilon^{-1}(x-1)]\},$$

$$\tilde\beta(x) = -\tilde\alpha(x).$$

При таком задании $\tilde\alpha, \tilde\beta$ будут выполнены условия (1.12), что влечет существование решения задачи (1)-(2). Остановимся, например, на случае условий (1.8). Покажем, что $T_\epsilon\tilde\alpha \le 0$. Для некоторого ξ

$$T_\epsilon\tilde\alpha = -\epsilon\tilde\alpha'' + a(x)\tilde\alpha' + G(x,\xi)\tilde\alpha + F(x,0) \le 0.$$

Нетрудно показать, что в случае выполнения условий (3) и (1.8) оператор T_ϵ обратно монотонен, то есть из условий

$$T_\epsilon p(x) \ge T_\epsilon q(x),\ x \in I, p(0) \ge q(0),\ R_\epsilon p \ge R_\epsilon q$$

следует $p(x) \ge q(x),\ x \in I$.

2 Построение разностной схемы

Пусть Ω - произвольная сетка исходного интервала:

$$\Omega = \{x_n : x_n = x_{n-1} + h_n, x_0 = 0,\ x_M = 1, \Delta_n = (x_{n-1},\ x_n]\}, h = \max_n h_n.$$

Для построения разностной схемы перейдем от (1) к системе уравнений с кусочно-постоянными коэффициентами:

$$\tilde T_\epsilon V = -\epsilon V'' + \tilde a(x)V' + \tilde F(x,V) = 0,\ V(0) = A,\ R_\epsilon V = B, \tag{2.1}$$

где $\tilde a(x)$ - диагональная квадратная матрица порядка N с диагональными элементами $\tilde a_i(x)$, $\tilde F$ - вектор-функция, где при $x \in \Delta_n$

$$\tilde a(x) = a_n = a(x_{n-1}),\ \tilde F(x,V) = F_n = F(x_{n-1}, V(x_{n-1})),$$

a и F соответствуют (1).

Выписывая решение уравнения (2.1) на каждом интервале Δ_n, требуя непрерывности производной на границе интервалов Δ_n и Δ_{n+1}, подставляя найденное решение на последнем интервале в правое краевое условие (2.1), придем к конечно-разностным соотношениям:

$$A_n V_{n-1}^h - B_n V_n^h + D_n V_{n+1}^h = f_n, \; V_0^h = A,$$

$$\delta V_M^h + a_M \beta [E - \exp(-h_M \epsilon^{-1} a_M)]^{-1} (V_M^h - V_{M-1}^h) = \tag{2.2}$$

$$= B + \beta [\epsilon a_M^{-1} - h_M [E - \exp(-h_M \epsilon^{-1} a_M)]^{-1}],$$

где E- единичная матрица,

$$A_n = a_n [E - \exp(-h_n \epsilon^{-1} a_n)]^{-1}, D_n = a_{n+1} [\exp(h_{n+1} \epsilon^{-1} a_{n+1}) - E]^{-1},$$

$$B_n = A_n + D_n, f_n = a_n^{-1} (h_n A_n - \epsilon E) F_n - a_{n+1}^{-1} (h_{n+1} D_n - \epsilon E).$$

Оценим точность построенной схемы.

Теорема 1. Пусть в дополнение к (3) выполнено условие (1.2) или (1.8). Тогда найдется C, такое что

$$\| [u]_\Omega - V^h \|_{N\Omega} \leq Ch. \tag{2.3}$$

*Доказательство.*При выполнении условий теоремы верна оценка (1.11), влекущая ограниченность решения задачи (1)-(2). Проводя рассуждения по аналогии со случаем одного уравнения [1], получим:

$$|u_i'(x)| \leq C_2 [1 + \epsilon^{-1} \exp(\alpha_i \epsilon^{-1} (x - 1))], \; i = 1, 2, ..., N. \tag{2.4}$$

Учитывая (2.4), нетрудно показать:

$$\| \tilde{T}_\epsilon u(x) - \tilde{T}_\epsilon V(x) \|_\infty \leq C_3 h [1 + \epsilon^{-1} \exp(\alpha_0 \epsilon^{-1} (x - 1))]. \tag{2.5}$$

Остановимся на случае условий (1.2). Пусть $z = u - V$. Используя теорему о среднем значении, получим, что при $x \in \Delta_n, \; j = 1, 2, ..., N$

$$\tilde{L}_j z_j(x) = -\epsilon z_j'' + \tilde{a}_j(x) z_j' + G_{jj}(x, \xi_n) z_j = (\tilde{T}_\epsilon u - \tilde{T}_\epsilon V)_j -$$

$$- \sum_{k \neq j} G_{jk}(x, \xi_n) z_k + \sum_{k=1}^{N} G_{jk}(x, \xi_n) ((u_k(x) - u_k(x_{n-1})) - (V_k(x) - V_k(x_{n-1}))).$$

Учитывая, что для $V(x)$, как и для $u(x)$, справедлива оценка (2.4), используя (2.5), получим:

$$|\tilde{L}_j z_j(x)| \le C_4 h[1 + \epsilon^{-1}\exp(\alpha_0\epsilon^{-1}(x-1))] + \sum_{k\neq j} |G_{jk} z_k|.$$

Определим функцию:

$$\Psi_j(x) = C_5 h[1 + \exp(\alpha_0(2\epsilon)^{-1}(x-1))] + \| \sum_{k\neq j} |G_{jk}(x) z_k(x)|/G_{jj(x)} \| \pm z_j(x),$$

Тогда можно подобрать C_5 таким образом, что для оператора $\tilde{L}_j$ и функции Ψ_j выполнены условия (1.6). В силу принципа максимума [4] $\Psi_j(x) \ge 0$, следовательно, $\|u - V\|_N \le Ch$. Учитывая, что по построению $V(x)$ является решением схемы (2.2), придем к оценке (2.3).

Пусть выполнены условия (1.8), $z = u - V$. Тогда :

$$\tilde{L}z = -\epsilon E z'' + \tilde{a}(x) z' + G(x,\xi) z = \tilde{T}_\epsilon u - \tilde{T}_\epsilon V + F(x,u) - \tilde{F}(x,u) + \tilde{F}(x,V) - F(x,V).$$

Нетрудно убедиться, что и в случае, когда при всех i $\tilde{a}_i \in Q^0[0,1]$, для оператора $\tilde{L}$ с краевыми условиями , соответствующими (2), справедливы лемма 2 и принцип максимума. Учитывая (2.5), нетрудно показать, что

$$\|\tilde{L}z(x)\|_\infty \le C_6 h[1 + \epsilon^{-1}\exp(\alpha_0\epsilon^{-1}(x-1))].$$

Определим вектор-функцию $\Psi(x)$ с компонентами

$$\Psi_i(x) = C_7 h\left[\exp(\alpha_0(2\epsilon)^{-1}(x-1)) + \exp(2\eta\alpha_0^{-1}x)\right] \pm z_i(x).$$

Можно подобрать C_7 таким образом, что для оператора $\tilde{L}$ и вектор-функции $\Psi(x)$ будут выполнены условия (1.6). В силу принципа максимума $\Psi(x) \ge 0$. Это доказывает теорему.

3 Случай слабо выраженного погранслоя

Остановимся на случае, когда в (2) правое краевое условие имеет вид $u'(1) = 0$. Нетрудно показать, что в этом случае оценка производной (2.4) заменяется на следующую:

$$\left\|\frac{d^j u}{dx^j}\right\|_\infty \le C[1 + \epsilon^{1-j}\exp(\alpha_0\epsilon^{-1}(x-1))],\ j = 1,2,3. \tag{3.1}$$

Из этой оценки следует, что производные решения не ограничены равномерно, начиная со второй. Целесообразно исследовать на сходимость схему направленных разностей, которая проще схем с экспоненциальными подгонками. Выпишем эту схему:

$$T_n^h u^h = -\epsilon \Lambda_{xx,n} u^h + a_n \Lambda_{x,n} u^h + F(x_n, u_n^h) = 0,\ n = 1, 2, ..., M-1,$$

$$u_0^h = A,\ R^h u^h = h_M^{-1}(u_M^h - u_{M-1}^h) = 0, \tag{3.2}$$

где u^h- сеточная вектор-функция, то есть вектор, компонентами которого являются сеточные функции, покомпонентно $u_n^h = u^h(x_n),\ x_n \in \Omega,\ a_n = a(x_n),\ n = 1, 2, \dots, M-1,$

$$\Lambda_{x,n} u^h = [u_n^h - u_{n-1}^h] h_n^{-1},\ \Lambda_{xx,n} u^h = [\Lambda_{x,n+1} u^h - \Lambda_{x,n} u^h]/[(h_n + h_{n+1})/2].$$

Лемма 4. Пусть в дополнение к (3) выполнены ограничения (1.2). Пусть p^h, q^h- две произвольные сеточные вектор-функции, $z^h = p^h - q^h$. Тогда:

$$\|z^h\|_{N\Omega} \le \sigma^{-1}\{\eta^{-1}\|T^h p - T^h q\|_{N,\Omega} + \|z_0^h\|_\infty + (2\epsilon\alpha_0^{-1} + h_M)\|R^h z^h\|_\infty\}. \tag{3.3}$$

Доказательство. Вычисляя $T_n^h p^h - T_n^h q^h$ и используя теорему о среднем значении, можно записать:

$$L_{ni}^h z^h = -\epsilon \Lambda_{xx,n} z_i^h + a_i(x_n) \Lambda_{x,n} z_i^h + G_{ii}(x_n, \xi_n^h) z_i^h(x_n) =$$

$$= (T_n^h p^h - T_n^h q^h)_i - \sum_{j \ne i} G_{ij}(x_n, \xi_n^h) z_j^h(x_n), \tag{3.4}$$

Определим сеточную вектор-функцию: Ψ^h с компонентами

$$\Psi_i^h(x_n) = \eta^{-1}\|T^h p^h - T^h q^h\|_{N,\Omega} + \|z_0^h\|_\infty + (2\epsilon\alpha_0^{-1} + h_M)\|R^h z^h\|_\infty \omega_n +$$

$$+ \left[\prod_{i=n+1}^{M}\left(1 + \frac{\alpha h_i}{2\epsilon}\right)\right]^{-1} + \left\|\sum_{j \ne i} G_{ij}(x_n, \xi_n^h) z_j^h(x_n) \left[G_{ii}(x_n, \xi_n^h)\right]^{-1}\right\|_{N,\Omega} \pm z_i^h(x_n),$$

где $\omega_M = 1$, при $n < M$

$$\omega_n = \left[\prod_{i=n+1}^{M}\left(1 + \frac{\alpha h_i}{2\epsilon}\right)\right]^{-1},$$

При таком выборе Ψ^h выполнятся условия:

$$L^h \Psi^h \geq 0,\ \Psi_0^h \geq 0,\ R^h \Psi^h \geq 0.$$

В силу принципа максимума покомпонентно $\Psi^h \geq 0$. Это доказывает лемму.

Из этой леммы следуют единственность и ограниченность решения схемы (3.2). Оценим точность этой схемы.

Теорема 2. Пусть выполнены ограничения (3), (1.2). Пусть шаги сетки Ω удовлетворяют ограничению $x_n + h_n \leq 1,\ n = 1, 2, \dots, M-1$. Тогда найдется C :

$$\|[u]_\Omega - u^h\|_{N\Omega} \leq Ch. \tag{3.5}$$

Доказательство. Пусть $z^h = u^h - [u]_\Omega$. Используя теорему о среднем значении, получим из (3.2) соотношение для произвольного i:

$$L_{ni}^h z^h = (T_n^h u^h - T_n^h [u]_\Omega)_i - \sum_{j \neq i} G_{ij}(x_n, \xi_n^h) z_j^h(x_n), \tag{3.6}$$

где L_{ni}^h соответствует (3.4). Используя оценки производных (3.1), как и в случае одного уравнения [5], нетрудно получить:

$$|(T_n^h u^h - T_n^h [u]_\Omega)_i| \leq Ch[1 + S_n^{-1} \exp(\alpha_0 \epsilon^{-1}(x_{n+1} - 1))], \tag{3.7}$$

где $S_n = \max(h_n, \epsilon),\ 0 < n < M,\ 1 \leq i \leq N$.

Определим сеточные вектор-функции ϕ^h, Ψ^h, θ^h с компонентами:

$$\phi_i^h(x_n) = \prod_{i=i}^{n} \left(1 + \frac{\alpha_0 h_i}{4\epsilon}\right) \Bigg/ \prod_{i=i}^{M} \left(1 + \frac{\alpha_0 h_i}{4\epsilon}\right), \Psi_i^h(x_n) = \phi_i^h(x_n) \left(1 + \frac{\alpha_0 h_M}{4\epsilon}\right),$$

$$\phi_i^h(x_0) = \phi_i^h(x_1)/(1 + \alpha_0 h_1/(4\epsilon)),\ \Psi_i^h(x_0) = \Psi_i^h(x_1)/(1 + \alpha_0 h_1/(4\epsilon)), n = 1, 2, \dots, M,$$

$$\theta_i^h(x_n) = \prod_{i=1}^{n} \left(1 + 2\eta \alpha_0^{-1} h_i\right), \theta_i^h(x_0) = 1.$$

Учитывая условия теоремы, нетрудно показать, что для всех узлов x_n покомпонентно

$$L_n^h \phi^h \geq C S_n^{-1} \phi^h(x_n),\ L_n^h \Psi^h \geq C S_n^{-1} \Psi^h(x_n), \tag{3.8}$$

$$\Psi^h(x_n) \geq \exp[\alpha_0 \epsilon^{-1}(x_{n+1} - 1)]. \tag{3.9}$$

Определим сеточную вектор-функцию R^h с компонентами:

$$R_i^h(x_n) = C[\phi_i^h(x_n)+\Psi_i^h(x_n)+x_n]h+\max_i \max_{n\le M-1}\left|\sum_{j\ne i} G_{ij}(x_n,\xi_n^h)z_j^h(x_n)G_{ii}^{-1}(x_n,\xi_n^h)\right|\pm z_i^h(x_n).$$

Учитывая соотношение (3.6), неравенства (3.7)-(3.9), для некоторого C получим:

$$L_n^h R^h \ge 0,\ n = 1,2,\ldots,M-1. \qquad (3.10)$$

Покажем, что при соответствующем выборе C

$$R^h(x_0) \ge 0,\ R^h(x_M) - R^h(x_{M-1}) \ge 0. \qquad (3.11)$$

Первое неравенство очевидно. Нетрудно убедиться, что при всех i

$$\Psi_i^h(x_M) - \Psi_i^h(x_{M-1}) \ge 0,\ \phi_i^h(x_M) - \phi_i^h(x_{M-1}) \ge C_1 h_M S_M^{-1}, \qquad (3.12)$$

где $S_M = \max(h_M,\epsilon)$. С другой стороны, при всех i

$$|z_i^h(x_M) - z_i^h(x_{M-1})| = |u_i(x_M - u_i(x_{M-1})|,$$

$$|u_i(x_M) - u_i(x_{M-1})| \le C_2 h_M,\ |u_i(x_M) - u_i(x_{M-1})| \le C_3 h_M^2 \epsilon^{-1}.$$

Применяя первое из этих неравенств при $\epsilon \le h_M$ и второе при $\epsilon > h_M$, учитывая (3.12), получим (3.11). Итак, неравенства (3.10),(3.11) имеют место и в силу принципа максимума при всех n $R_n^h \ge 0$. Учитывая условия (1.2), нетрудно заключить, что

$$\max_i \max_{n\le M-1} |z_i(x_n)| \le C_4 h.$$

Требуемое неравенство (3.5) будет иметь место, если показать, что при всех i $|u_i(x_M) - u_i^h(x_M)| \le Ch$. Это следует из того, что

$$|u_i(x_M) - u_i^h(x_M)| \le |u_i(x_{M-1}) - u_i^h(x_{M-1})| + |u_i(x_M) - u_i(x_{M-1})|.$$

Теорема доказана.

Заметим, что ограничение на сетку Ω будет выполнено, если, например, при всех n $h_n \le h_M$.Ограничение на Ω можно ослабить до следующего: $h_n \le q(1-x_n)$, где q- произвольная положительная постоянная. Нетрудно убедиться, что при этом доказанная теорема останется в силе.

Остановимся на анализе схемы (3.2) в случае ограничений (1.8).

Сначала установим условие, когда для линейного оператора

$$L_{ni}^h z^h = -\epsilon_n \Lambda_{xx,n} z_i^h + a_i(x_n)\Lambda_{x,n} z_i^h + \sum_{k=1}^{N} G_{ik} z_k^h(x_n),$$

$$1 \le i \le N,\ 1 \le n \le M-1 \tag{3.13}$$

с краевыми условиями

$$z_i^h(x_0),\ R_i^h z^h = \delta_i z^h(x_M) + \beta_i(\epsilon)\Lambda_{x,M} z_i^h \tag{3.14}$$

справедлив принцип максимума.

Лемма 5. Предположим, что в (3.13)-(3.14) при всех i

$$\epsilon_n > 0,\ a_i(x_n) \ge 0,\ \delta_i \ge 0,\ \beta_i \ge 0, \delta_i + \beta_i > 0,\ n = 1, 2, \dots, M-1.$$

Пусть существует сеточная вектор-функция ϕ^h *такая, что покомпонентно при всех* n

$$\phi^h(x_n) > 0,\ L_n^h \phi^h > 0, \phi^h(x_M) > \phi^h(x_{M-1}). \tag{3.15}$$

Тогда, если для некоторой сеточной вектор-функции z^h

$$z^h(x_0) \ge 0,\ L_n^h z^h \ge 0, n = 1, 2, \dots, M-1,\ R^h z^h \ge 0, \tag{3.16}$$

то при всех n $\ z^h(x_n) \ge 0.$

Доказательство. Предположим, что какая-то компонента сеточной вектор-функции z^h в каком-то узле отрицательна. Представим z^h в виде: $z_i^h(xn) = \phi_i^h(x_n)V_i^h(x_n)$. Тогда для некоторой компоненты i и узла x_m выполнится

$$V_i^h(x_m) = \min_j \min_{x_n \in \Omega} V_j^h(x_n) < 0.$$

Покажем, что $m \ne M$. Предположим, что $V_i^h(x_M) < 0$. Из (3.16) следует, что $z_i^h(x_M) \ge z_i^h(x_{M-1})$. Учитывая (3.15), получим $V_i^h(x_M) > V_i^h(x_{M-1})$. Следовательно, $m \ne M$. Минимум сеточной функции V_i^h достигается во внутреннем узле, поэтому

$$V_i^h(x_m) < 0,\ \Lambda_{x,m} V_i^h \le 0,\ \Lambda_{x,m+1} V_i^h \ge 0.$$

Нетрудно убедиться, что

$$L_{mi}^h z^h = a_i(x_m)\phi_i^h(x_{m-1})\Lambda_{x,m} V_i^h + V_i(x_m)^h L_{mi}^h \phi^h - \frac{2\epsilon_m}{h_m + h_{m+1}} \phi_i^h(x_{m+1} \Lambda_{x,m+1} V_i^h +$$

$$+\frac{2\epsilon_m}{h_m+h_{m+1}}\phi_i^h(x_{m-1})\Lambda_{x,m}V_i^h+\sum_{k=1}^{N}G_{mk}\phi_k^h(x_m)(V_k^h(x_m)-V_i^h(x_m))<0.$$

Это противоречит условиям (3.16). Лемма доказана.

Лемма 6. Пусть в дополнение к (1.8) выполнено условие:

$$\alpha_0^2-(8\epsilon+2\alpha_0 h)\eta\geq\gamma>0. \tag{3.17}$$

Пусть p^h и q^h - две произвольные сеточные вектор-функции. Тогда при всех n

$$\|p^h(x_n)-q^h(x_n)\|_\infty\leq[3\alpha_0^2\eta^{-1}\gamma^{-1}\|T^hp^h-T^hq^h\|_{N\Omega}+\|p^h(x_0)-q^h(x_0)\|_\infty]exp(2\eta\alpha_0^{-1}x_n)+$$

$$+(4\alpha_0^{-1}\epsilon+h_M)\|R^hp^h-R^hq^h\|_\infty\exp(-\alpha_0(\alpha_0h+4\epsilon)^{-1}(1-x_n)).$$

Доказательство. Определим $z^h=p^h-q^h$. Тогда:

$$L_n^hz^h=T_n^hp^h-T_n^hq^h,\ 0<n<M, \tag{3.18}$$

где L^h задано согласно (3.13) с $\epsilon_n=\epsilon$. Учитывая условие (3.17) несложно показать, что при всех $n=1,2,\ldots,M-1$ выполнится

$$L_n^h\phi^h\geq\gamma[10S_n]^{-1}\phi_n^h,\ L_n^h\theta^h\geq\eta\gamma[2\alpha_0^2]^{-1}\theta_n^h, \tag{3.19}$$

где $S_n=\max(\alpha_0h_n,\epsilon)$. Согласно лемме 5 для оператора L^h справедлив принцип максимума. Покажем, что при всех i

$$\phi_i^h(x_n)\leq\exp(-\alpha_0(\alpha_0h+4\epsilon)^{-1}(1-x_n)).$$

Это следует из того, что $\phi_i^h(x_M)=1$, при $n<M$

$$\ln\phi_i^h(x_n)=\sum_{i=n+1}^{M}\ln\left(1-\frac{\alpha_0h_i}{4\epsilon+\alpha_0h_i}\right)\leq-\sum_{i=n+1}^{M}\frac{\alpha_0h_i}{4\epsilon+\alpha_0h_i}.$$

Используя оценки (3.19), на основании принципа максимума придем к утверждению леммы.

Теорема 3. Пусть выполнены ограничения (3), (1.8). Пусть выполнены условия (3.17) и шаги сетки Ω удовлетворяют ограничению $x_n+h_n\leq\ 1$. Тогда для схемы (3.2) справедлива оценка точности:

$$\|[u]_\Omega-u^h\|_{N\Omega}\leq Ch.$$

Доказательство. Для погрешности аппроксимации справедлива оценка (3.7). Определяя
$$R^h = C[\theta^h + \phi^h + \Psi^h]h \pm z^h,$$
где ϕ^h , Ψ^h и θ^hопределены в теореме 2, учитывая (3.19), используя принцип максимума и подбирая подходящую постоянную C, придем к утверждению теоремы.

Схемы (2.2) и (3.2) представляют собой систему нелинейных алгебраических уравнений. Для нахождения разностного решения нужно использовать какой-либо метод линеаризации [6].

Остановимся на случае схемы (3.2). Предположим, что в дополнение к условиям (1.2) $\eta \le G_{ii}(x) \le R, \quad \eta/R > 1-\sigma$. Можно показать, что тогда итерационный процесс:

$$-\epsilon\Lambda_{xx,n}u^{k+1} + a(x_n)\Lambda_{x,n}u^{k+1} + Ru_n^{k+1} = Ru_n^k - F(x_n, u_n^k), \qquad (3.20)$$

$$u_0^{k+1} = A,\ u_M^{k+1} - u_{M-1}^{k+1} = 0$$

при любом начальном приближении сходится к решению схемы (3.2) со скоростью геометрической прогрессии со знаменателем $q = 2 - \sigma - \eta/R$. На каждом итерационном шаге для нахождения решения можно использовать метод прогонки [4], который для данной системы уравнений устойчив в силу диагонального преобладания.

4 Результаты численных экспериментов

Рассмотрим систему двух нелинейных уравнений для случаев, когда для матрицы Якоби $G(x)$ выполнены условия (1.2) и (1.8). Будем вычислять погрешность построенной схемы (2.2) и схемы направленных разностей (3.2) при задании краевых условий первого рода, когда имеется экспоненциальный погранслойный рост решения и в случае $u'(1) = 0$, когда пограничный слой слабо выражен.

Погрешность $z^h = u^h - [u]_\Omega$ является сеточной вектор-функцией и под ее нормой подразумевается $\|z^h\|_{2\Omega}$, которая определена выше. Решение разностной схемы при всех экспериментах находилось на основе итерационного метода Пикара (3.20) с учетом различных краевых условий, итерации продолжались, если не выполнялось $\|z^h\|_{2\Omega} < 10^{-8}$. Итерационный метод сходился, если в (3.20) $R \ge 1$ и не сходился при $R = 0$. Сетка Ω предполагается равномерной.

Сначала рассмотрим случай условий (1.2). Рассматриваемая система имеет вид:

$$-\epsilon u'' + u' + u + 0.5\exp(-v) + f_1(x) = 0,$$
$$-\epsilon v'' + 2v' + 0.5u + exp(v) + f_2(x) = 0, \tag{4.1}$$

где $f_1(x)$ и $f_2(x)$ зависят от вида решения.

Остановимся на случае краевых условий первого рода с решением системы уравнений (4.1) вида:

$$u(x) = \exp(\epsilon^{-1}(x-1)) + \cos(0.5\pi x),$$
$$v(x) = -\exp(2\epsilon^{-1}(x-1)+1) + \exp(x) \tag{4.2}$$

В Табл. 1 приведена норма погрешности схемы (2.2) в зависимости от ϵ и шага h сетки. Данные этой таблицы подтверждают оценку (2.3). В табл. 2 для сравнения приведена норма погрешности схемы (3.2). Вычисления подтверждают, что эта схема не сходится равномерно по ϵ.

Теперь остановимся на случае $u'(1) = 0, v'(1) = 0$. Решение (4.1) зададим в виде:

$$u(x) = 0.5\pi\epsilon\exp(\epsilon^{-1}(x-1)) + \cos(0.5\pi x),$$
$$v(x) = -0.5\epsilon\exp(2\epsilon^{-1}(x-1)+1) + \exp(x) \tag{4.3}$$

В табл. 3 приведена норма погрешности схемы (3.2) в зависимости от ϵ и шага сетки. Результаты вычислений подтверждают равномерную сходимость схемы с оценкой точности (3.5).

Остановимся на случае условий (1.8) для матрицы Якоби. Исследуемая система имеет вид:

$$-\epsilon u'' + u' + 0.5u - \exp(v) + f_1(x) = 0,$$
$$-\epsilon v'' + 2v' - u + 0.5exp(-v) + f_2(x) = 0, \tag{4.4}$$

где как и ранее $f_1(x)$ и $f_2(x)$ зависят от вида решения.

Сначала остановимся на случае краевых условий первого рода с решением (4.2). В Табл. 4 приведена норма погрешности схемы (2.2) в зависимости от ϵ и шага h сетки. Результаты вычислений подтверждают оценку (2.3).

Теперь остановимся на случае $u'(1) = 0, v'(1) = 0$, когда решение задаем согласно (4.3). В табл. 5 приведена норма погрешности схемы (3.2) при различных ϵ и h. Результаты вычислений подтверждают оценку (3.5) в случае выполнения условий (1.8).

Таблица 1.

ϵ	h			
	0.1	0.05	0.01	0.005
1.0	0.24E-1	0.12E-1	0.24E-2	0.12E-2
1.0E-1	0.42E-1	0.21E-1	0.44E-2	0.22E-2
1.0E-2	0.44E-1	0.23E-1	0.47E-2	0.23E-2
1.0E-3	0.44E-1	0.23E-1	0.47E-2	0.23E-2

Таблица 2.

ϵ	h			
	0.1	0.05	0.01	0.005
1.0	0.24E-1	0.13E-1	0.27E-2	0.14E-2
1.0E-1	0.38	0.29	0.74E-1	0.38E-1
1.0E-2	0.44E-1	0.18	0.51	0.35
1.0E-3	0.45E-1	0.23E-1	0.12	0.24

Таблица 3.

ϵ	h			
	0.1	0.05	0.01	0.005
1.0	0.60E-1	0.30E-1	0.60E-2	0.30E-2
1.0E-1	0.18	0.89E-1	0.17E-1	0.85E-2
1.0E-2	0.22	0.11	0.23E-1	0.11E-1
1.0E-3	0.23	0.12	0.24E-1	0.12E-1

Таблица 4.

ϵ	h			
	0.1	0.05	0.01	0.005
1.0	0.24E-1	0.12E-1	0.24E-2	0.12E-2
1.0E-1	0.12	0.50E-1	0.84E-2	0.41E-2
1.0E-2	0.18	0.99E-1	0.18E-1	0.90E-2
1.0E-3	0.18	0.97E-1	0.20E-1	0.10E-1

Таблица 5.

ϵ	h			
	0.1	0.05	0.01	0.005
1.0	0.86E-1	0.45E-1	0.92E-2	0.46E-2
1.0E-1	0.19	0.94E-1	0.18E-1	0.91E-2
1.0E-2	0.32	0.16	0.34E-1	0.17E-1
1.0E-3	0.33	0.17	0.36E-1	0.18E-1

Список литературы

[1] Задорин А.И.,Игнатьев В.Н.Численное решение квазилинейного сингулярно возмущенного уравнения второго порядка// Ж.вычисл. матем. и матем.физ. 1991.Т. 31. N 1. С. 157-160.

[2] Бахвалов Н.С. К оптимизации методов решения краевых задач при наличии пограничного слоя// Ж.вычисл. матем. и матем.физ. 1969.Т. 9. N 4. С. 841-890.

[3] Чанг К.,Хауэс Ф. Нелинейные сингулярно возмущенные краевые задачи. М.: Мир,1988.

[4] Самарский А.А. Теория разностных схем. М.: Наука, 1977.

[5] Задорин А.И.Численное решение обыкновенного уравнения второго порядка со слабо выраженным пограничным слоем // Моделирование в механике.Новосибирск:ИТПМ СО АН СССР, 1991.Т. 5. N 1. С. 141-152 .

[6] Ортега Д., Рейнболдт В. Итерационные методы решения нелинейных систем уравнений со многими неизвестными.М.: Мир, 1975.