УДК 51962

ЧИСЛЕННОЕ РЕШЕНИЕ УРАВНЕНИЯ С МАЛЫМ ПАРАМЕТРОМ НА БЕСКОНЕЧНОМ ИНТЕРВАЛЕ

А.И. Задорин
ИИТПМ СО РАН
644099 Омск, Певцова 13
(ЖВМиМФ, т. 38, № 10, с. 1671-1682)

Аннотация

Рассматривается сначала линейное, а затем нелинейное уравнение второго порядка с малым параметром при старшей производной на полуоси. Осуществлен переход к конечному интервалу с оценкой возникающей погрешности. Обоснована равномерная сходимость схемы направленных разностей для редуцированной задачи.

При математическом моделировании различных физических явлений, таких как распространение примеси от источника, процесс распространения пламени, краевые условия ставятся на бесконечности. При решении дифференциальных уравнений для таких задач конечно-разностным методом необходимо перейти к конечному интервалу. При этом требуется оценить погрешность в решении, возникающую при переходе к конечному интервалу.

Краевые задачи на полубесконечном интервале рассматривались в ряде работ, например, в [1]-[10]. В соответствии с подходом [2]-[8] при корректной постановке краевой задачи с предельным условием на бесконечности должно быть гарантировано, что это предельное условие выделяет семейство решений исходного уравнения и что значения этих решений порождают в фазовом пространстве переменных устойчивое многообразие. Условие, что значения решений при определенных значениях аргумента принадлежат этому многообразию, дает граничное условие в конечной точке.

В данной работе сначала рассматривается линейное, а затем нелинейное автономное уравнение второго порядка на полубесконечном интервале. Уравнение содержит малый параметр при старшей производной, поэтому исследуется зависимость градиентов решения от малого параметра как для исходной, так и для редуцированной задачи, сформулированной на конечном интервале. Оценена погрешность, возникающая при аппроксимации краевого условия, соответствующего условию на бесконечности. Показано, как эта погрешность влияет на точность решения редуцированной задачи на конечном интервале.

Доказано,что редуцированная задача не содержит выраженного пограничного слоя и для ее решения можно использовать схему направленных разностей, которая обладает в данном случае свойством равномерной сходимости по малому параметру.

Всюду под C и C_i понимаются положительные постоянные, не зависящие от ε и шагов разностной сетки, причем в случаях, где это не вызывает недоразумений, различные величины ограничиваются сверху одной постоянной . Под нормой сеточной функции или функции непрерывного аргумента $p(x)$ подразумевается $\|p\| = \max|p(x)|$, где x пробегает область определения функции.

1. Случай линейного уравнения на полубесконечном интервале

Рассмотрим краевую задачу для линейного уравнения :

$$-\varepsilon u'' + a(x)u' + c(x)(u - B) = 0,$$
$$u(0) = A, \ \lim_{x\to\infty}[u(x) - B] = \lim_{x\to\infty} u'(x) = 0. \tag{1.1}$$

Предполагаем, что функции $a(x)$, $c(x)$ непрерывны,

$$D \geq a(x) \geq \alpha > 0, \ \varepsilon \in (0, 1], \quad c(x) \geq \beta > 0, \ a(x) \to m, \ c(x) \to n, \ x \to \infty.$$

Согласно [9], при наложенных ограничениях существует единственное решение задачи (1.1). Вопрос переноса краевого условия из бесконечности в случае линейной задачи рассматривался,например, в [3],[6]. Остановимся на свойствах решения задачи (1.1).

Лемма 1. При $A \leq B$ решение задачи (1.1) возрастает, при $A \geq B$ - убывает.

Доказательство. Пусть $z = u - B$. Тогда

$$L_\varepsilon z = -\varepsilon z'' + a(x)z' + c(x)z = 0, \ z(0) = A - B, \ \lim_{x\to\infty} z(x) = \lim_{x\to\infty} z'(x) = 0.$$

Пусть $A \leq B$ (случай $A \geq B$ аналогичен). Рассуждая от противного, нетрудно показать, что при всех x $z(x) \leq 0$, поэтому $u(x) \leq B$. С другой стороны,

$$u'(x) = -\varepsilon^{-1} \int_x^\infty c(s)(u(s) - B) \exp\left[\frac{1}{\varepsilon}\int_s^x a(t)dt\right] ds. \tag{1.2}$$

Из (1.2) следует $u'(x) \geq 0$. Лемма доказана.

Из (1.2) следует, что для некоторой постоянной

$$|u'(x)| \leq C. \tag{1.3}$$

Лемма 2. При всех $x \in [0, \infty)$

$$|u(x) - B| \leq |A - B| \exp[r_0 x], \tag{1.4}$$

где r_0 *- отрицательный корень уравнения:*

$$-\varepsilon q^2 + Dq + \beta = 0.$$

*Доказательство.*Пусть $z = u - B$. Определим

$$\Psi(x) = |A - B| \exp[r_0 x] \pm z(x).$$

Тогда

$$\Psi(0) \geq 0, \ \lim_{x \to \infty} \Psi(x) = 0, \quad L_\varepsilon \Psi(x) \geq 0, \ 0 < x < \infty.$$

Вследствие принципа максимума, справедливого для дифференциального оператора L_ε , $\Psi(x) \geq 0, \quad 0 \leq x < \infty$. Это доказывает лемму.

Для решения задачи (1.1) конечно-разностным методом необходимо перейти к краевым условиям на конечном интервале. Согласно [3],[4] условие на бесконечности в задаче (1.1) эквивалентно для больших x соотношению

$$u'(x) = \gamma(x)(u(x) - B), \tag{1.5}$$

где $\gamma(x)$ является решением сингулярной задачи Коши:

$$R_\varepsilon \gamma = \varepsilon \gamma^{\mathrm{sh}} - a\gamma + \varepsilon \gamma^2 - c = 0, \ \lim_{x \to \infty} \gamma(x) = r, \tag{1.6}$$

где r - отрицательный корень уравнения $\varepsilon q^2 - mq - n = 0$; решение (1.6) существует и единственно.

Из (1.5) и леммы 1 следует $\gamma(x) \leq 0$ при $x > 0$, из (1.2) и (1.5) нетрудно получить $|\gamma(x)| \leq \|c\|/\alpha$.

При переходе от (1.1) к задаче на конечном интервале $[0, L_0]$ значение $\gamma(L_0)$ может быть найдено с некоторой погрешностью. Оценим влияние этой погрешности на точность решения задачи (1.1). Итак, рассмотрим краевую задачу на конечном интервале:

$$-\varepsilon V'' + a(x)V' + c(x)(V - B) = 0, \ V(0) = A, \ V^{\mathrm{sh}}(L_0) = \gamma_0(L_0)(V - B). \tag{1.7}$$

Теорема 1. Пусть $\gamma_0(L_0) \leq 0, \ |\gamma(L_0) - \gamma_0(L_0)| \leq \Delta$. *Тогда при всех* $x \in [0, L_0]$

$$|u(x) - V(x)| \leq |A - B| \varepsilon \Delta \alpha^{-1} \exp[r_0 L_0 + \alpha \epsilon^{-1}(x - L_0)]. \tag{1.8}$$

Доказательство. Определим $z = u - V$. Тогда z является решением задачи:

$$L_\varepsilon z = 0, \ z(0) = 0, \ z'(L_0) - \gamma_0(L_0) z(L_0) = (\gamma(L_0) - \gamma_0(L_0))(u(L_0) - B).$$

Определим функцию:

$$\Psi(x) = \Delta\varepsilon\alpha^{-1}|u(L_0) - B|\exp[\varepsilon^{-1}\alpha(x - L_0)] \pm z(x).$$

Тогда

$$\Psi(0) \geq 0, \Psi'(L_0) - \gamma_0(L_0)\Psi(L_0) \geq 0,\ L_\varepsilon\Psi(x) \geq 0,\ 0 < x < L_0.$$

Из принципа максимума и леммы 2 следует утверждение теоремы.

Оценим погрешность, которая может возникнуть, если при задании краевого условия в точке L_0 не использовать соотношение (1.5).

В соответствии с доказанной теоремой в случае условия $V'(L_0) = 0$ выполнится оценка:

$$|u(x) - V(x)| \leq \varepsilon|A - B|\alpha^{-2}\|c\|\exp[r_0L_0 + \alpha\varepsilon^{-1}(x - L_0)],\ 0 \leq x \leq L_0. \quad (1.8)$$

Нетрудно показать что в случае условия $V(L_0) = B$ выполнится

$$|u(x) - V(x)| \leq |A - B|\exp[r_0L_0 + \alpha\varepsilon^{-1}(x - L_0)],\ 0 \leq x \leq L_0. \quad (1.8)$$

Остановимся на вопросе приближенного решения задачи (1.6). Перейдем от (1.6) к уравнению с возмущенными коэффициентами:

$$\varepsilon\tilde{\gamma}^{\mathrm{sh}} - \tilde{a}\tilde{\gamma} + \varepsilon\tilde{\gamma}^2 - \tilde{c} = 0,\ \lim_{x\to\infty}\tilde{\gamma}(x) = r, \quad (1.9)$$

Предполагаем непрерывность функций $\tilde{a}, \tilde{c}$,

$$\tilde{a}(x) \to m,\ \tilde{c}(x) \to n,\ x \to\ \infty, \tilde{a} \geq \tilde{\alpha} > 0, \tilde{c} \geq \tilde{\beta} > 0.$$

Лемма 3. Пусть $\|a - \tilde{a}\| \leq \Delta,\ \|c - \tilde{c}\| \leq \Delta$. *Тогда найдется* C, *такое, что*

$$\|\gamma - \tilde{\gamma}\| \leq C\Delta. \quad (1.10)$$

Доказательство. Учитывая, что (1.9) является аналогом уравнения (1.6) в случае возмущенных коэффициентов в уравнении (1.1), получим $\tilde{\gamma}(x) \leq 0,\ |\tilde{\gamma}(x)| \leq \|\tilde{c}\|/\tilde{\alpha}$. Пусть $z = \gamma - \tilde{\gamma}$. Тогда

$$R_\epsilon z = \varepsilon z' - [a - \varepsilon(\gamma + \tilde{\gamma})]z = c - \tilde{c} + (a - \tilde{a})\tilde{\gamma},\quad \lim_{x\to\infty} z(x) = 0.$$

Применяя принцип максимума к оператору R_ε, нетрудно показать:

$$\|z\| \leq \Delta\alpha^{-1}(1 + \|\tilde{c}\|\tilde{\alpha}^{-1}),$$

откуда следует (1.10). Лемма доказана.

Если при достаточно больших x справедливы представления:

$$a(x) \approx \tilde{a}(x) = \sum_{i=0}^{N} a_i x^{-i},\ c(x) \approx \tilde{c}(x) = \sum_{i=0}^{N} c_i x^{-i},\ a_0 = m,\ c_o = n,$$

то согласно [3] $\gamma(x)$ может быть приближенно найдено в виде:

$$\gamma(x) \approx \tilde{\gamma}(x) = \sum_{i=0}^{N} \gamma_i x^{-i}.$$

Для этого необходимо подставить разложения $a,\ c$ в (1.6) и получим рекуррентную формулу относительно γ_i. Более точные утверждения имеются в [3].

Для приближенного нахождения $\gamma(x)$ можно использовать малость параметра ε. Пусть $\gamma_0(x)$ - отрицательное решение уравнения:

$$-a\gamma_0(x) + \varepsilon\gamma_0^2(x) - c = 0.$$

Лемма 4. Пусть функции $a(x), c(x)$ непрерывно дифференцируемы при всех $0 \leq x < \infty,\quad |a'(x)|, |c'(x)| \leq C_1$. Тогда найдется , такое что при всех $x \in [0, \infty)\quad |\gamma(x) - \gamma_0(x)| \leq C\varepsilon$.

Доказательство. Пусть $z = \gamma - \gamma_0$. Тогда

$$R_\varepsilon z = \varepsilon z' - az = \varepsilon(\gamma_0^2 - \gamma^2) - \varepsilon\gamma_0',\ \lim_{x\to\infty} z(x) = 0.$$

Для оператора R_ε справедлив принцип максимума, вследствие которого из условий:

$$\lim_{x\to\infty} \Psi(x) \geq 0,\ R_\varepsilon\Psi(x) \leq 0,\ x < \infty \tag{1.11}$$

следует $\Psi(x) \geq 0,\ 0 \leq x < \infty$. Определим

$$\Psi(x) = \alpha^{-1}\|\varepsilon(\gamma_0^2 - \gamma^2) - \varepsilon\gamma_0'\| \pm z(x).$$

Тогда выполнятся соотношения (1.11) и поэтому

$$|z(x)| \leq \varepsilon\alpha^{-1}\|\gamma_0^2 - \gamma^2 - \gamma_0'\|. \tag{1.12}$$

Функция $\gamma_0(x)$ ограничена вместе с производной равномерно по ε. Учитывая, что $|\gamma(x)| \leq C$, из (1.11) получим утверждение леммы.

2. Нелинейное автономное уравнение на полубесконечном интервале

Рассмотрим краевую задачу:

$$T_\varepsilon u = -\varepsilon u'' + mu' + g(u) = 0,$$

$$u(0) = A,\ \lim_{x\to\infty}[u(x) - B] = \lim_{x\to\infty} u'(x) = 0. \tag{2.1}$$

Предполагаем, что функция $g(s)$ дважды непрерывно дифференцируема при всех $s \in R$,

$$\varepsilon \in (0,1],\ m > 0,\ g(B) = 0,\ g'(B) > 0,\ |g''(B)| \leq C,$$

$$g'(s) \geq -\beta, s \in R,\ \beta > 0,\ m^2 - 4\beta\varepsilon \geq \sigma > 0. \qquad (2.2)$$

Вопросы переноса краевого условия из бесконечности в случае нелинейного уравнения рассматривались в [4],[5],[7]-[10]. В [8] показана устойчивость решения задачи на конечном интервале к погрешности при задании правого краевого условия. Обоснована сходимость метода линеаризации Пикара. Заметим,что при решении сведенной к конечному интервалу задачи конечно-разностным методом, метод линеаризации необходимо обосновать для разностной схемы. В [10] на полубесконечном интервале рассмотрено одномерное стационарное уравнение Бюргерса, краевое условие из бесконечности в точку L_0 снесено в результате аналитического интегрирования исходного уравнения от L_0 до бесконечности.

Решение задачи (2.1) при условиях (2.2) существует и единственно [9]. Задача (2.1) с ограничениями (2.2) является модельной , например, при математическом описании переноса пламени в случае одностадийного кинетического механизма и подобия полей температуры и концентрации [11], когда

$$g(T) = K(T - B)\exp(-E/T),$$

где:

T - температура смеси,m - скорость переноса пламени, ε - коэффициент диффузии, A - температура свежей смеси,B - температура горения, K - константа скорости реакции, E - энергия активации.

Получим оценку устойчивости оператора T_ε.

Лемма 5. Пусть $p(x)$, $q(x)$ - две произвольные дважды непрерывно дифференцируемые функции, ограниченные на бесконечности. Тогда при всех $x < \infty$

$$|p(x) - q(x)| \leq \exp(2\beta m^{-1}x)[m^2\beta^{-1}\sigma^{-1}\|T_\varepsilon p - T_\varepsilon q\| + |p(0) - q(0)|]. \qquad (2.3)$$

Доказательство. Пусть $z = p - q$. Тогда

$$L_\varepsilon z = -\varepsilon z'' + mz' + [g(p) - g(q)][p - q]^{-1}z = T_\varepsilon p - T_\varepsilon q.$$

Для $y < \infty$ рассмотрим интервал [0,y]. Определим :

$$\Psi(x) = \exp[2\beta m^{-1}x][m^2\beta^{-1}\sigma^{-1}\|T_\varepsilon p - T_\varepsilon q\| + |z(0)|]+$$

$$+\exp[m(2\varepsilon)^{-1}(x - y)]|z(y)| \pm z(x).$$

При таком задании $\Psi(x)$ выполнится

$$L_\varepsilon\Psi(x) \geq 0,\ 0 < x < y,\ \Psi(0) \geq 0,\ \Psi(y) \geq 0.$$

Учитывая, что для оператора L_ε справедлив принцип максимума [12], получим $\Psi(x) \geq 0$ при $0 \leq x \leq y$. Устремляя $y \to \infty$, придем к утверждению леммы.

Задавая в (2.3) $p = u$, $q = 0$, получим:

$$|u(x)| \leq \exp[2\beta m^{-1} x][m^2 \beta^{-1} \sigma^{-1} |g(0)| + |A|].$$

В силу условия $g'(B) > 0$ для заданного α: $g'(B) > \alpha > 0$ найдется L: $g'_u(u(x)) \geq \alpha$ при $x \geq L$.

Лемма 6. Решение задачи (2.1) $u(x)$ возрастает при $x \geq L$, если $u(L) \leq B$ и убывает при $u(L) \geq B$.

Доказательство. Пусть $u(L) \leq B, z = u - B$. Определим линейный оператор:

$$L_\varepsilon \phi = -\varepsilon\phi'' + m\phi' + [g(z+B) - g(B)]z^{-1}\phi. \tag{2.4}$$

Если $\phi(L) \leq 0,\ \lim\limits_{x\to\infty} \phi(x) = 0,\ L_\varepsilon\phi = 0$, то, как нетрудно убедиться, $\phi(x) \leq 0$ при $x \geq L$. Определяя $\phi = z$,получим $u(x) \leq B$. Используя представление производной:

$$u'(x) = -\varepsilon^{-1} \int\limits_x^\infty [g(u(s)) - g(B)] \exp[m\varepsilon^{-1}(x-s)]ds, \tag{2.5}$$

получим $u'(x) \geq 0$ при $x \geq L$. Случай $u(L) \geq B$ рассматривается аналогично. Лемма доказана.

Лемма 7. При всех $x \geq L$

$$|u(x) - B| \leq |u(L) - B| \exp[r_0(x - L)],$$

где r_0 - отрицательный корень уравнения: $-\varepsilon q^2 + mq + \alpha = 0$.

Доказательство можно осуществить на основе принципа максимума для оператора L_ε, как это сделано в лемме 2.

Используя (2.5), несложно показать, что производная решения задачи (2.1) удовлетворяет оценке (1.3).

Остановимся на вопросе переноса краевого условия из бесконечности в точку L_0. Краевое условие на бесконечности (2.1) при достаточно больших x эквивалентно соотношению [11*]:

$$u'(x) = r_1(u(x) - B) + \gamma(u(x)), \tag{2.6}$$

где r_1 - отрицательный корень уравнения $-\varepsilon q^2 + mq + g'(B) = 0$,

$$\varepsilon\gamma'(u)[r_1(u - B) + \gamma(u)] = \varepsilon r_2 \gamma(u) + g(u) - g'(B)(u - B),$$

$$\gamma(B) = 0, r_1 + r_2 = m\varepsilon^{-1}. \tag{2.7}$$

Перейдем от (2.1) к задаче на конечном интервале:

$$-\varepsilon V'' + mV' + g(V) = 0,$$

$$V(0) = A,\ V'(L_0) = r_1[V(L_0) - B] + \gamma_0(V(L_0)), \tag{2.8}$$

где функция $\gamma_0(V)$ непрерывно дифференцируема в некоторой окрестности точки B.

Теорема 2. Пусть для достаточно больших L_0
$|\gamma(u(L_0)) - \gamma_0(u(L_0))| \leq \Delta,\ r_1 + \gamma_0'(B) < 0.$ *, Тогда для всех* $x \in [0, L_0]$

$$|u(x) - V(x)| \leq 2\Delta\varepsilon m^{-1} \exp[m(2\varepsilon)^{-1}(x - L_0)].$$

Доказательство. Пусть $z = u - V$. Тогда

$$L_\varepsilon z = -\varepsilon z'' + mz' + [g(u) - g(V)](u - V)^{-1} z = 0,$$

$$z(0) = 0,\ z'(L_0) = r_1 z(L_0) + \gamma(u(L_0)) - \gamma_0(V(L_0)).$$

Для некоторого θ между $u(L_0)$ и $V(L_0)$ краевые условия можно переписать в виде:

$$z(0) = 0,\ z'(L_0) - (r_1 + \gamma_0'(\theta))z(L_0) = \gamma(u(L_0)) - \gamma_0(u(L_0)).$$

Определим

$$\Psi(x) = 2\Delta\varepsilon m^{-1} \exp[m(2\varepsilon)^{-1}(x - L_0)] \pm z(x).$$

При таком задании $\Psi(x)$ при всех $x \in (0, L_0)$:

$$L_\varepsilon \Psi(x) > 0,\ \Psi(0) \geq 0,\ \Psi'(L_0) - (r_1 + \gamma_0'(\theta))\Psi(L_0) \geq 0.$$

В силу принципа максимума, справедливого для оператора L_ε [12], $\Psi(x) \geq 0,\ x \in [0, L_0]$. Это доказывает теорему.

Заметим, что ограничение на L_0 снимается, если при всех $V \in R$
$r_1 + \gamma_0'(V) \leq 0$. При этом нужно предположить непрерывную дифференцируемость $\gamma_0(V)$ при всех $V \in R$.

Лемма 8. При всех $x \geq L$ *выполнится:*

$$|\gamma(u(x))| \leq C \exp[2r_0(x - L)],$$

где r_0 *определено в лемме 7.*

Доказательство. Учитывая (2.6),(2.7), получим:

$$\varepsilon \frac{d}{dx}\gamma(u(x)) - r_2\varepsilon\gamma(u(x)) = g(u(x)) - g'(B)(u(x) - B).$$

Из этого уравнения следует:

$$\gamma(u(x)) = -\varepsilon^{-1} \int_x^\infty [g(u(s)) - g'(B)(u(s) - B)] \exp[r_2(x - s)] ds.$$

Следовательно,

$$|\gamma(u(x))| \leq \max_{x \geq L} |g_u''(u(x))| (2r_2\varepsilon)^{-1}(u(x) - B)^2,\ x \geq L.$$

Учитывая значение r_2 и лемму 7, получим утверждение леммы.

Остановимся на случае $\gamma_0(u) = 0$. Правое краевое условие тогда принимает вид:

$$V'(L_0) = r_1[V(L_0) - B].$$

Из теоремы 2 и леммы 8 при $L_0 \geq L$ получим оценку точности:

$$|u(x) - V(x)| \leq C\varepsilon \exp[m(2\varepsilon)^{-1}(x - L_0) + 2r_0(L_0 - L)].$$

При решении ряда задач, например в [13], условие $\lim\limits_{x\to\infty} u(x) = B$ $\lim\limits_{x\to\infty} u'(x) = 0$ переносят в конечную точку,не анализируя поведение решения при достаточно больших x и не оценивая погрешности, возникающей при замене краевого условия.

Пусть $V'(L_0) = 0$. Введем $z = u - V$. Тогда

$$L_\varepsilon z = 0,\ z(0) = 0,\ z'(L_0) = u'(L_0),$$

где L_ε определено в теореме 2. Задавая подходящие верхнюю и нижнюю функции, используя принцип максимума, получим:

$$|u(x) - V(x)| \leq C\varepsilon \exp[m(2\varepsilon)^{-1}(x - L_0)],\ 0 \leq x \leq L_0.$$

В случае $L_0 > L$ полученная оценка может быть уточнена:

$$|u(x) - V(x)| \leq C\varepsilon \exp[m(2\varepsilon)^{-1}(x - L_0) + r_0(L_0 - L)],\ 0 \leq x \leq L_0.$$

Пусть $V(L_0) = B$. На основании принципа максимума нетрудно получить

$$|u(x) - V(x)| \leq C \exp[m(2\varepsilon)^{-1}(x - L_0)].$$

В случае $L_0 > L$ согласно лемме 7 полученная оценка может быть уточнена:

$$|u(x) - V(x)| \leq C \exp[m(2\varepsilon)^{-1}(x - L_0) + r_0(L_0 - L)],\ 0 \leq x \leq L_0.$$

Остановимся на вопросе приближенного решения задачи (2.7). Определим

$$\gamma_0(u) = [g'(B)(u - B) - g(u)]/(\varepsilon r_2). \tag{2.9}$$

Лемма 9. Найдется такое, что при всех $x > 0$:

$$|\gamma(u(x)) - \gamma_0(u(x))| \leq C\varepsilon,$$

где $u(x)$ - решение задачи (2.1).

Доказательство. Пусть $z = \gamma - \gamma_0$. Из (2.7) следует:

$$\varepsilon \frac{d}{dx} z(u(x)) - \varepsilon r_2 z(u(x)) = -\varepsilon\gamma_0'(u(x))u'(x).$$

Из этого уравнения можно получить:

$$z(u(x)) = \int\limits_x^\infty \gamma_0'(u(s))u'(s) \exp[r_2(x - s)]ds.$$

Теперь нетрудно убедиться, что $|z(u(x))| \le C\varepsilon$. Лемма доказана.

Заметим, что при выборе $\gamma_0(u)$ согласно (2.9), в соответствии с леммой 9 выполнены условия теоремы 2 с $\Delta = C\varepsilon$, следовательно, при этом верна соответствующая этой теореме оценка погрешности перехода к конечному интервалу.

3. Анализ разностной схемы для задачи на конечном интервале.

Рассмотрим краевую задачу:

$$T_\varepsilon u = -\varepsilon u'' + a(x)u' + f(u,x) = 0,$$

$$u(0) = A,\ R_\varepsilon u = \eta u'(L) + \delta u(L) - \gamma(u(L)) = 0. \qquad (3.1)$$

Полагаем, что всюду ниже выполнены условия :

$$\varepsilon \in (0,1],\ a \geq \alpha > 0,\ \delta - \gamma'(V) \geq 0,\ V \in R,\ \eta > 0,$$

$$f'_u \geq -\beta,\ \beta > 0,\ \alpha^2 - 4\beta\varepsilon \geq \sigma > 0. \qquad (3.2)$$

Предполагаем что функции a, f, γ дважды непрерывно дифференцируемы по своим аргументам. Задача (3.1) является более общей в сравнении с задачами (1.7) и (2.8). Остановимся на свойствах решения задачи (3.1).

Используя принцип максимума, нетрудно показать, что для двух дважды непрерывно дифференцируемых функций p и q

$$|p(x) - q(x)| \leq \exp(2\beta\alpha^{-1}x)[\alpha^2\beta^{-1}\sigma^{-1}\|T_\varepsilon p - T_\varepsilon q\| + |p(0) - q(0)|] +$$

$$+ 2\varepsilon(\alpha\eta)^{-1}|R_\varepsilon p - R_\varepsilon q| \exp[\alpha(2\varepsilon)^{-1}(x - L)].$$

Из этой оценки следует единственность решения задачи (3.1) и оценка решения:

$$|u(x)| \leq \exp(2\beta\alpha^{-1}x)[\alpha^2\beta^{-1}\sigma^{-1}\|f(0,x)\| + |A|] +$$

$$+ 2\varepsilon(\alpha\eta)^{-1}|\gamma(0)| \exp[\alpha(2\varepsilon)^{-1}(x - L)]. \qquad (3.3)$$

Оценим производные решения задачи (3.1).

Лемма 10. Найдется C, такое что при всех $x \in [0, L]$

$$|u^{(j)}(x)| \leq C[1 + \varepsilon^{1-j}\exp[\alpha\varepsilon^{-1}(x - L)]],\ j = 1,2,3. \qquad (3.4)$$

Доказательство. Используя (3.1), нетрудно показать:

$$u'(x) = \exp\left[\int_L^x \varepsilon^{-1}a(s)ds\right] u'(L) - \varepsilon^{-1}\int_x^L f(u(s),s)\exp\left[\int_s^x \varepsilon^{-1}a(s)ds\right] ds. \qquad (3.5)$$

Из краевого условия следует $|u'(L)| \leq C$. Тогда из (3.5) получим $|u'(x)| \leq C_1$

Докажем (3.4) при $j = 2$. Пусть $p(x) = u'(x)$. Дифференцируя (3.1), получим:

$$-\varepsilon p''(x) + a(x)p'(x) = F(x,u,u'),\quad |F(x,u,u')| \leq C_2.$$

Следовательно,

$$p'(x) = \exp\left[\int\limits_L^x \varepsilon^{-1} a(s)ds\right] p'(L) + \varepsilon^{-1} \int\limits_x^L F(s, u(s), u'(s)) \exp\left[\int\limits_s^x \varepsilon^{-1} a(s)ds\right] ds.$$

Из (3.1) получим $|p'(L)| \le C_3\varepsilon^{-1}$. Теперь из представления для $p'(x)$ следует (3.4) при $j = 2$. Случай $j = 3$ аналогичен. Лемма доказана.

Согласно лемме 10 решение задачи (3.1) имеет слабо выраженный пограничный слой около конца интервала $x = L$: производные, начиная со второй, неограниченно растут при $\varepsilon \to 0$. Целесообразно исследовать схему направленных разностей на равномерную сходимость по параметру ε, так как эта схема проще схем с экспоненциальными подгонками, например, [12],[14]-[15]. Итак, на равномерной сетке Ω с шагом h выпишем схему направленных разностей для задачи (3.1):

$$T_n^h u^h = -\varepsilon \Lambda_{xx,n} u^h + a_n \Lambda_{x,n} u^h + f(u_n^h, x_n) = 0,$$

$$u_0^h = A,\ R_h u^h = \delta u_N^h + \eta \Lambda_{x,N} u^h - \gamma(u_N^h) = 0, \tag{3.6}$$

где

$$\Lambda_{x,n} u^h = \frac{u_n^h - u_{n-1}^h}{h},\ \Lambda_{xx,n} u^h = \frac{u_{n+1}^h - 2u_n^h + u_{n-1}^h}{h^2}.$$

Для анализа схемы (3.6) рассмотрим линейный оператор:

$$L_n^h z^h = -\varepsilon \Lambda_{xx,n} z^h + a_n \Lambda_{x,n} z^h + b_n z_n^h \tag{3.7}$$

с краевыми условиями

$$z_0^h,\ D_h z^h = \tau z_N^h + \eta \Lambda_{x,N} z^h. \tag{3.8}$$

Лемма 11. Пусть в (3.7)-(3.8) $\varepsilon > 0,\ a_n \ge 0,\ \tau \ge\ 0, \eta > 0$. *Тогда если* $\exists \phi^h$*:*

$$\phi_n^h > 0,\ n = 0, 1, ..., N,\quad L_n^h \phi^h > 0,\ n = 1, 2, ..., N-1,\ \phi_N^h > \phi_{N-1}^h, \tag{3.9}$$

то для оператора L^h *справедлив принцип максимума, то есть из условий*

$$z_0^h \ge 0,\ D_h z^h \ge 0,\ L_n^h z^h \ge 0,\ n = 1, 2, ..., N-1 \tag{3.10}$$

следует $z_n^h \ge 0$ *при всех* $n = 0, 1, ..., N$.

Доказательство. Предположим, что для некоторого n_0 $z_{n_0}^h < 0$ и получим противоречие. Определим сеточную функцию V^h: $z_n^h = V_n^h \phi_n^h$. Тогда $V_{n_0}^h < 0$. Покажем, что V^h имеет локальный отрицательный минимум. Из условия $z_0^h \ge 0$ следует $V_0^h \ge 0$. Для z_N^h справедливо одно из двух:

1). $z_N^h \ge 0$. Тогда $V_N^h \ge 0$. При этом V^h имеет отрицательный минимум.

2). $z_N^h < 0$. Из условия $D_h z^h \ge 0$ следует $z_N^h \ge z_{N-1}^h$. Учитывая, что $\phi_N^h > \phi_{N-1}^h$, $V_N^h < 0$, $V_{N-1}^h < 0$, получим $V_N^h > V_{N-1}^h$. В этом случае для V^h выполнятся условия:

$$V_0^h \ge 0,\ V_{n_0}^h < 0,\ V_N^h > V_{N-1}^h,$$

откуда следует, что V^h имеет отрицательный минимум.

Пусть минимум достигается в узле m .Тогда:

$$V_m^h < 0,\ \Lambda_{x,m}V^h \le 0,\ \Lambda_{x,m+1}V^h \ge 0. \tag{3.11}$$

Нетрудно убедиться, что

$$L_m^h z^h = a_m\phi_{m-1}^h\Lambda_{x,m}V^h + V_m^h L_m^h\phi^h - \varepsilon h^{-1}\phi_{m+1}^h\Lambda_{x,m+1}V^h + \varepsilon h^{-1}\phi_{m-1}^h\Lambda_{x,m}V^h.$$

Учитывая условия (3.9) и (3.11), получим $L_m^h z^h < 0$, что противоречит (3.10). Лемма доказана.

Определим сеточные функции $\phi^h,\ \theta^h,\ \rho^h$:

$$\phi_n^h = \left[1+\frac{\alpha h}{2\varepsilon}\right]^{n-N}, \theta_n^h = \left[1+\frac{2\beta h}{\alpha}\right]^{n}, \rho_n^h = \left[1+\frac{\alpha h}{2\varepsilon}\right]^{n+1-N}. \tag{3.12}$$

Нетрудно убедиться, что

$$\theta_n^h \le \exp[2\beta\alpha^{-1}x_n],\ \exp[\alpha(2\varepsilon)^{-1}(x_n-L)] \le \phi_n^h \le \exp[\alpha(2\varepsilon+\alpha h)^{-1}(x_n-L)].$$

Лемма 12. Пусть $h \le h_0 = \sigma/(4\alpha\beta), p^h$ и q^h - две произвольные сеточные функции. Тогда при всех n:

$$|p_n^h - q_n^h| \le C[\|T^h p^h - T^h q^h\| + |p_0^h - q_0^h|]\exp(2\beta\alpha^{-1}x_n) +$$
$$+2\varepsilon(\alpha\eta)^{-1}|R_h p^h - R_h q^h|\exp[\alpha(2\varepsilon+\alpha h)^{-1}(x_n-L)]. \tag{3.13}$$

Доказательство. Определим $z^h = p^h - q^h$. Тогда :

$$L^h z^h = T^h p^h - T^h q^h,\ z_0^h = p_0^h - q_0^h,\ D_h z^h = R_h p^h - R_h q^h, \tag{3.14}$$

где L^h соответствует (3.7) с $b_n = [f(p_n^h, x_n) - f(q_n^h, x_n)]/(p_n^h - q_n^h)$,

D_h - линейный оператор:

$$D_h z^h = [\delta - (\gamma(p_N^h) - \gamma(q_N^h))(p_N^h - q_N^h)^{-1}]z_N^h + \eta\Lambda_{x,N}z^h.$$

Учитывая ограничение $h \le h_0$, получим при всех n:

$$L_n^h\phi^h \ge \sigma[8\theta + 4\alpha\theta]^{-1}\phi_n^h,\quad L_n^h\theta^h \ge \beta\sigma[2\alpha^2+\sigma]^{-1}\theta_n^h, \tag{3.15}$$

где $\theta = \max(h,\varepsilon)$. Учитывая (3.15) и лемму 11, получим, что для оператора L^h справедлив принцип максимума. Определим Ψ^h:

$$\Psi^h = C[\|T^h p^h - T^h q^h\| + |p_0^h - q_0^h|]\theta^h + 2\varepsilon(\alpha\eta)^{-1}|R_h p^h - R_h q^h|\phi^h \pm z^h.$$

Учитывая (3.14)-(3.15), можно подобрать C таким образом, чтобы выполнились условия(3.10). Тогда из принципа максимума следует утверждение леммы.

Из (3.13) следуют единственность решения схемы (3.6) и оценка устойчивости решения:

$$|u_n^h| \le C_1[\|f(0,x)\| + |A|]\exp\left[\frac{2\beta}{\alpha}x_n\right] + C_2|\gamma(0)|\varepsilon\exp\left[\frac{\alpha(x_n - L)}{2\varepsilon + \alpha h}\right]. \quad (3.16)$$

Исследуем вопрос равномерной сходимости схемы (3.6).

Теорема 3. Пусть $h \le h_0,\ h_0 = \sigma/(4\alpha\beta)$. *Найдется* C:

$$\|[u]_\Omega - u^h\| \le Ch, \quad (3.17)$$

где $[u]_\Omega$ *- решение задачи (3.1) в узлах сетки* Ω.

Доказательство. Определим $z^h = u^h - [u]_\Omega$. Тогда

$$L^h z^h = T^h u^h - T^h[u]_\Omega, \quad (3.18)$$

где L^h соответствует (3.7) при задании

$$b_n = [f(u_n^h, x_n) - f(u_n, x_n)]/(u_n^h - u_n),\ u_n = u(x_n).$$

Оценим правую часть (3.18) :

$$T_n^h u^h - T_n^h[u]_\Omega = \varepsilon(u''(x_n) - \Lambda_{xx,n}[u]_\Omega) - a_n(u'(x_n) - \Lambda_{x,n}[u]_\Omega).$$

Используя неравенства [15]:

$$|\Lambda_{xx,n}[u]_\Omega - u''(x_n)| \le \int\limits_{x_{n-1}}^{x_{n+1}} |u'''(s)|ds, \quad (3.19)$$

$$|\Lambda_{x,n}[u]_\Omega - u'(x_n)| \le h^{-1}\int\limits_{x_{n-1}}^{x_n}\int\limits_{s}^{x_n} |u''(t)|dt\ ds, \quad (3.20)$$

и привлекая оценки производных (3.4), получим :

$$|T_n^h u^h - T_n^h[u]_\Omega| \le C_1 h[1 + \theta^{-1}\exp(\alpha(2\varepsilon)^{-1}(x_{n+1} - L))]. \quad (3.21)$$

Определим Ψ^h:

$$\Psi^h = [C_2\theta^h + C_3\rho^h]h \pm z^h.$$

Учитывая, что

$$D_h z^h = \left[\delta - \frac{\gamma(u_N^h) - \gamma(u_N)}{u_N^h - u_N}\right] z_N^h + \eta\Lambda_{x,N} z^h = \eta(u'_N - \Lambda_{x,N}[u]_\Omega)$$

и используя соотношения (3.4) и (3.20) , получим

$$|D_h z^h| \le C_4 h\theta^{-1}. \quad (3.22)$$

Учитывая, что

$$L_n^h \rho^h \geq C_5 \theta^{-1} \rho_n^h, \quad \rho_n^h \geq \exp[\alpha(2\varepsilon)^{-1}(x_{n+1} - L)]$$

и привлекая соотношения (3.15) и (3.18), получим, что при некоторых C_2 и C_3 для Ψ^h выполнятся неравенства (3.10). Это доказывает $|z_n^h| \leq Ch$ при всех n, кроме случая $n = N$. Остается показать, что $|z_N^h| \leq Ch$. Для этого случая имеем:

$$|z_N^h| \leq |u_N - u_{N-1}| + |u_{N-1} - u_{N-1}^h| + |u_N^h - u_{N-1}^h|.$$

Из краевого условия в (3.6) получим $|u_N^h - u_{N-1}^h| \leq C_6 h$. Пользуясь полученной оценкой для $n < N$, придем к утверждению теоремы.

Схема (3.6) представляет собой систему нелинейных алгебраических уравнений. Покажем, что при достаточно хорошем начальном приближении метод Ньютона является сходящимся, причем сходимость метода равномерна по параметру ε. Итак, определим метод линеаризации :

$$-\varepsilon \Lambda_{xx,n} u^{j+1} + a_n \Lambda_{x,n} u^{j+1} + f_u'(u_n^j, x_n) u_n^{j+1} = f_u'(u_n^j, x_n) u_n^j - f(u_n^j, x_n),$$

$$u_0^{j+1} = A, \ [\delta - \gamma'(u_N^j)] u_N^{j+1} + \eta \Lambda_{x,N} u^{j+1} = \gamma(u_N^j) - \gamma'(u_N^j) u_N^j. \qquad (3.23)$$

Сеточная функция u^0 предполагается заданной. Определим $z^j = u^h - u^j$. Тогда

$$-\varepsilon \Lambda_{xx,n} z^{j+1} + a_n \Lambda_{x,n} z^{j+1} + f_u'(u_n^j, x_n) z_n^{j+1} = 0.5 f_u''(\theta_n^j, x_n)(z_n^j)^2,$$

$$z_0^{j+1} = 0, \ [\delta - \gamma'(u_N^j)] z_N^{j+1} + \eta \Lambda_{x,N} z^{j+1} = \gamma''(\theta_N^j)(z_N^j)^2/2$$

для некоторой сеточной функции θ^j. Пользуясь принципом максимума и подбирая подходящую барьерную функцию, получим:

$$\|z^{j+1}\| \leq C \|z^j\|^2.$$

Следовательно, при достаточно хорошем начальном приближении итерационный метод (3.23) квадратично сходится.

На каждой итерации система уравнений относительно u^{j+1} линейна, но матрица этой системы , в силу допустимости $f_u' < 0$, не имеет диагонального преобладания. Для нахождения решения такой системы можно использовать метод немонотонной прогонки [16].

Остановимся на случае задачи (2.8) с выбором $\gamma_0(u)$ из (2.9). Проверим, будут ли выполнены в этом случае условия (3.2). Нетрудно показать, что

$$\delta - \gamma'(V) = g'(V)/(\varepsilon r_2).$$

Условие $\delta - \gamma'(V) \geq 0$ нарушится, если $g'(V) < 0$. Учитывая, что $g'(B) > 0$, можно показать, что при выборе достаточно большой длины интервала L теорема 3 останется в силе.

4. Результаты численных экспериментов

Сначала была рассмотрена линейная краевая задача:

$$-\varepsilon u''(x) + u'(x) + u(x) - 1 = 0,\ u(0) = 0,\ \lim_{x\to\infty} u(x) = 1. \tag{4.1}$$

Решение этой задачи выписывалось в явном виде и сравнивалось с решением этого уравнения на конечном интервале при различных подходах к заданию правого краевого условия. Вычислялась максимальная погрешность, возникающая при переходе к конечному интервалу.

В табл.1 приведена норма погрешности в зависимости от ε и длины интервала L при задании $u(L) = 1$.

В табл.2 приведена норма погрешности при задании $u'(L) = 0$.

Задание правого краевого условия согласно (1.5) с выбором $\gamma(x) = r$, где r соответствует (1.6), приводит к совпадению решения задачи на конечном интервале с решением задачи (4.1).

Данные этих таблиц подтверждают полученные оценки точности (1.8а),(1.8б).

Таблица 1.

ϵ	L			
	1	5	10	20
1.0	1.62	0.14	0.62E-2	0.13E-4
1.0E-1	1.20	0.03	0.31E-3	0.33E-7
1.0E-2	1.11	0.02	0.15E-3	0.75E-8
1.0E-3	1.10	0.02	0.14E-3	0.63E-8
1.0E-4	1.10	0.02	0.14E-3	0.62E-8

Таблица 2.

ϵ	L			
	1	5	10	20
1.0	0.53	0.52E-1	0.23E-2	0.49E-5
1.0E-1	1.0E-1	0.26E-2	0.26E-4	0.28E-8
1.0E-2	1.1E-2	0.21E-3	0.15E-5	0.74E-10
1.0E-3	1.1E-3	0.20E-4	0.14E-6	0.63E-11
1.0E-4	1.1E-4	0.20E-5	0.14E-7	0.62E-12

Теперь остановимся на случае нелинейной краевой задачи.

Сначала была рассмотрена нелинейная краевая задача:

$$-\varepsilon u'' + u' + u\exp(u) = 0,\ u(0) = 1,\ \lim_{x\to\infty} u(x) = 0. \tag{4.2}$$

Задача (4.2) сводилась к конечному интервалу и для решения редуцированной задачи применялась схема направленных разностей. Численно исследовалось влияние способа задания краевого условия на решение разностной схемы. Шаг разностной сетки принимался постоянным ($h = 0.1$) и за сеточное решение, не искаженное из-за переноса краевого условия из бесконечности, принималось решение на достаточно большом интервале, $L_0 = 100$, при этом $|u(100)| < exp(-50)$. Рассматривались различные способы задания краевого условия:

$M1 : u(L) = 0$; $M2 : u'(L) = 0$;

$M3$: согласно (2.6) с $\gamma(u) = 0$;

$M4$: согласно (2.6) с $\gamma(u)$, соответствующим (2.9).

Схема (3.6) представляет собой систему нелинейных уравнений и для нахождения ее решения использовался модифицированный метод Пикара:

$$-\varepsilon\Lambda_{xx,n}u^{j+1} + a_n\Lambda_{x,n}u^{j+1} + Gu_n^{j+1} = Gu_n^j - f(u_n^j, x_n),$$

$$u_0^{j+1} = A, \delta u_N^{j+1} + \eta\Lambda_{x,N}u^{j+1} + Gu_N^{j+1} = Gu_N^j + \gamma(u_N^j).$$

При $G \geq 5$ итерационный метод сходился. Итерации заканчивались, если $\|u^{j+1} - u^j\| \leq 10^{-12}$. В табл. 3 приведена норма погрешности в зависимости от способа задания краевого условия и длины интервала при $\varepsilon = 1$, в табл. 4 - при $\varepsilon = 0.1$. При других ε результаты вычислений аналогичны: точность увеличивается с уменьшение ε и с увеличением длины интервала. Более точен метод $M4$. Нелинейность в краевом условии для метода $M4$ не увеличивала количество итераций.

Таблица 3.

L	$M1$	$M2$	$M3$	$M4$
1	0.42	0.16	0.29E-1	0.17E-1
5	0.30E-1	0.13E-1	0.31E-3	0.41E-4
10	0.14E-2	0.61E-3	0.74E-5	0.68E-5

Таблица 4.

L	$M1$	$M2$	$M3$	$M4$
1	0.26	0.54E-1	0.99E-2	0.12E-2
5	0.64E-2	0.11E-2	0.11E-4	0.54E-5
10	0.78E-4	0.13E-4	0.75E-7	0.74E-7

Затем аналогичным образом была рассмотрена краевая задача:

$$-\varepsilon u'' + u' + (u-2)\exp(-u^{-1}) = 0, \; u(0) = 1, \; \lim_{x\to\infty} u(x) = 2. \tag{4.3}$$

Начальное приближение для итерационного метода при всех вычислениях задавалось в виде прямой линии между значениями решения на концах интервала, известными из решения исходной задачи на интервале длины $L_0 = 100$.

В табл. 5 приведена норма погрешности в случае задачи (4.3) при $L = 1$ в зависимости от способа задания краевого условия и значения ε.

Таблица 5.

ε	$M1$	$M2$	$M3$	$M4$
1.0	0.71	0.17	0.23E-1	0.17E-1
1.0E-1	0.66	0.59E-1	0.13E-1	0.14E-2
1.0E-2	0.66	0.34E-1	0.87E-2	0.98E-4
1.0E-3	0.66	0.31E-1	0.82E-2	0.88E-5

Список литературы

[1] Коддингтон Э.А.,Левинсон Н. Теория обыкновенных дифференциальных уравнений.М: Издательство иностранной литературы, 1958.

[2] Абрамов А.А. О переносе условия ограниченности для некоторых систем обыкновенных линейных дифференциальных уравнений// Ж. вычисл. матем. и матем. физ. 1961. Т.1, N 4. С. 733-737.

[3] Биргер Е.С., Ляликова Н.Б. О нахождении для некоторых систем обыкновенных дифференциальных уравнений решений с заданным условием на бесконечности// Ж. вычисл. матем. и матем. физ. 1965. Т.5, N 6. С. 979-990.

[4] Абрамов А.А., Балла К., Конюхова Н.Б. Перенос граничных условий из особых точек для систем обыкновенных дифференциальных уравнений // Сообщ. по вычисл. матем. М.: ВЦ АН СССР, 1981.

[5] Конюхова Н.Б. К решению краевых задач на бесконечном интервале для некоторых нелинейных систем обыкновенных дифференциальных уравнений с особенностью // Ж. вычисл. матем. и матем. физ. 1970. Т.10, N 5. С. 1150-1163.

[6] Биргер Е.С. Об оценке погрешности замены условия ограниченности решения линейного дифференциального уравнения на бесконечном интервале// Ж. вычисл. матем. и матем. физ. 1968.Т.8, N 3. С. 674-678.

[7] Конюхова Н.Б. О выделении устойчивых многообразий для некоторых нелинейных систем обыкновенных дифференциальных уравнений с особенностью// Ж. вычисл. матем. и матем. физ. 1973.Т.13, N 3. С. 609-626.

[8] Конюхова Н.Б. Об итеративном решении нелинейных краевых задач, выделяющих малые решения некоторых систем обыкновенных дифференциальных уравнений с особенностью// Ж. вычисл. матем. и матем. физ. 1974. Т.14, N 5. С.1221-1231.

[9] Клоков Ю.А. Краевые задачи с условием на бесконечности для уравнений математической физики.Рига: 1963.

[10] Захаров Ю.Н.Об одном методе решения уравнения с краевыми условиями на бесконечности// Вычислительные технологии. Т.2, N 7. Новосибирск: ИВТ СО РАН , 1993.

[11] Зельдович Я.Б., Баренблатт Г.И., Либрович В.Б.и др.

Математическая теория горения и взрыва. М.: Наука, 1980.

[12] Задорин А.И.,Игнатьев В.Н.Численное решение квазилинейного сингулярно возмущенного уравнения второго порядка// Ж. вычисл.матем. и матем. физ. 1991.Т.31,N 1. С. 157-160.

[13] Пененко В.В., Алоян А.Е.Модели и методы для задач охраны окружающей среды. Новосибирск: Наука, 1985.

[14] Ильин А.М.Разностная схема для дифференциального уравнения с малым параметром при старшей производной// Матем. заметки. 1969. Т.6, N 2. С. 237-248.

[15] Kellogg R.B.,Tsan A.Analysis of some difference approximations for a singular perturbation problems without turning points// Math.Comput.1978.V.32,N 144. P. 1025-1039.

[16] Самарский А.А. Теория разностных схем. М.: Наука, 1983.