УДК 519.632

ЧИСЛЕННОЕ РЕШЕНИЕ УРАВНЕНИЯ С МАЛЫМ ПАРАМЕТРОМ И ТОЧЕЧНЫМ ИСТОЧНИКОМ НА БЕСКОНЕЧНОМ ИНТЕРВАЛЕ

А.И. Задорин
Омский филиал Института математики им. С.Л.Соболева СО РАН

Рассматривается уравнение второго порядка с малым параметром при старшей производной на бесконечном интервале. Предполагается, что производная решения имеет разрыв первого рода при $x = 0$. Задано условие на скачок производной. Исследуется вопрос переноса краевых условий на конечный интервал, строится и обосновывается разностная схема для решения возникающей на конечном интервале задачи.

При математическом моделировании стационарного распространения примеси от точечного источника возникает краевая задача для уравнения с малыми параметрами при старших производных и источниковым членом в виде δ- функции Дирака. Краевые условия для такой задачи ставятся в бесконечно удаленной от источника точке. При этом возникает вопрос, как перенести краевые условия на границу ограниченной области.

Другая проблема – в потере гладкости решения из-за присутствия в уравнении источникового члена в виде δ-функции. В [1]-[2] данная проблема решается на основе использования интегрального тождества и построения соотношений баланса для ячеек сеточной области. В [3] предлагается в окрестности источника использовать приближенную аналитическую формулу для решения, а вне этой окрестности использовать конечно-разностную схему, но не исследуется точность данного подхода.

В данной работе эти вопросы рассматриваются в случае обыкновенного дифференциального уравнения. Рассматриваемая постановка задачи является упрощением задачи, моделирующей реальные процессы переноса, однако она содержит часть имеющихся проблем.

Итак, рассмотрим исходную краевую задачу:

$$Lu = \varepsilon u'' - a(x)u' - c(x)u = f(x), \ x \neq 0 \ , \tag{1}$$

$$L_0 u = \varepsilon u'(+0) - \varepsilon u'(-0) = -Q, \qquad (1)$$

$$u(x) \to 0,\ x \to -\infty, \quad u(x) \to 0,\ x \to +\infty, \qquad (1)$$

где

$$D \geq a(x) \geq \alpha > 0,\ c(x) \geq \beta > 0,\ \varepsilon > 0,\ Q > 0,$$

$$a(x) \to a_1,\ c(x) \to c_1,\ f(x) \to 0,\ \ x \to -\infty,$$

$$a(x) \to a_2,\ c(x) \to c_2,\ f(x) \to 0,\ x \to +\infty, \qquad (2)$$

Предполагаем, что функции $a(x),\ c(x),\ f(x)$ - достаточно гладкие. Условие на скачок производной соответствует тому, что в точке $x = 0$ находится точечный источник мощности Q, задаваемый дельта -функцией Дирака [4].

Решение $u(x)$ предполагается дважды непрерывно дифференцируемой функцией всюду, кроме точки нуль, где сама функция непрерывна, а ее первая производная имеет разрыв первого рода.

Задача (1)-(2) является модельной при анализе переноса примеси от точечного источника в направлении ветра [4], при этом:

$u(x)$ - концентрация примеси, ε - коэффициент диффузии, $a(x)$ - скорость ветра, $c(x)$ - коэффициент поглощения примеси, Q - мощность точечного источника, $f(x)$ - несосредоточенный источник или сток примеси.

В данной работе из оценки производных решения сделан вывод, что в окрестности источника имеется внутренний экспоненциальный переходной слой. При построении разностной схемы на конечном интервале учтено поведение решения в окрестности источника. Схемы экспоненциальной подгонки строились в целом ряде работ, например, в [5]-[8]. В данной работе так же строится схема экспоненциальной подгонки, в отличие от [5]-[8] в постановке задачи добавляется соотношение на скачок производной.

Перенос краевых условий из бесконечности осуществлен на основании подхода [10],[11]. В соответствии с этим подходом предельное условие на бесконечности выделяет семейство решений исходного уравнения и значения этих решений порождают в фазовом пространстве переменных устойчивое многообразие. Условие, что значения решений при определенных значениях аргумента принадлежат этому многообразию, дает граничное условие в конечной точке.

Всюду ниже под C и C_i будут подразумеваться положительные постоянные, не зависимые от параметра ε и шагов разностной сетки. Под нормой функции непрерывного аргумента $p(x)$ будем понимать

$||p|| = \max|p(x)|$, где x пробегает область определения функции. Аналогично определяется норма сеточной функции $||p^h||_\Omega$.

1. Анализ решения исходной задачи

Покажем, что для дифференциального оператора, соответствующего задаче (1), справедлив принцип максимума и из условий:

$$L\Psi(x) \le 0,\ x \ne 0,\ L_0\Psi(x) \le 0,\ \lim_{x\to\pm\infty}\Psi(x) \ge 0 \tag{1.1}$$

следует, что $\Psi(x) \ge 0,\ \ x \in (-\infty, +\infty)$ для функции $\Psi(x)$, дважды непрерывно дифференцируемой всюду, кроме точки нуль, где сама функция непрерывна, а ее первая производная имеет разрыв первого рода.

Предположим, что для некоторого x_0 $\Psi(x_0) < 0$. Тогда в силу непрерывности $\Psi(x)$ и заданных краевых условий существует точка s локального отрицательного минимума. Если $s \ne 0$, то получим противоречие с условием $L\Psi(s) \le 0$. Если $s = 0$, то получим противоречие с условием $L_0\Psi(s) \le 0$. Итак , из (1.1) следует $\Psi(x) \ge 0$.

Из принципа максимума следует, что в случае $f(x) = 0$ $\ u(x) \ge 0$ и то, что решение задачи (1) единственно.

Л е м м а 1. При всех x

$$|u(x)| \le \left\|\frac{f(x)}{c(x)}\right\| + \Phi(x), \tag{1.2}$$

где

$$\Phi(x) = \begin{cases} Q\alpha^{-1}\exp(\alpha\varepsilon^{-1}x), & \textit{если } x \le 0, \\ Q\alpha^{-1}\exp(r_0 x), & \textit{если } x > 0, \end{cases}$$

$$r_0 = -2\beta/\{D + \sqrt{D^2 + 4\beta\varepsilon}\},\quad 0 > r_0 > -\beta/D\ .$$

Д о к а з а т е л ь с т в о. Определим

$$\Psi(x) = \left\|\frac{f(x)}{c(x)}\right\| + \Phi(x) \pm u(x).$$

Тогда $L_0\Psi(x) \leq 0$. Нетрудно убедиться, что при $x < 0$ $L\Psi(x) \leq 0$. В случае $x > 0$ имеем:

$$L\Psi(x) \leq Q\alpha^{-1}[\varepsilon r_0^2 - Dr_0 - \beta]\exp(r_0 x) = 0.$$

Итак, для функции $\Psi(x)$ выполнены условия (1.1). Из принципа максимума следует утверждение леммы.

Рассмотрим случай $f(x) = 0$. Покажем, что $u(x)$ возрастает при $x < 0$ и убывает при $x > 0$. Пусть $x > 0$. Представляя уравнение (1a) в дивергентном виде и интегрируя, получим:

$$u'(x) = -\frac{1}{\varepsilon}\int\limits_x^\infty \{c(s)u(s) + f(s)\} exp\left[\int\limits_s^x \varepsilon^{-1}a(t)dt\right] ds. \tag{1.3}$$

Из этого соотношения следует, что в случае $f(x) = 0$ $u(x)$ убывает при $x > 0$. Случай $x < 0$ аналогичен.

Л е м м а 2 . Пусть функции $a(x), c(x)$ и $f(x)$ трижды непрерывно дифференцируемы. Найдется постоянная C такая, что для $j = 1, 2, 3, 4$ при всех $x < 0$ справедливы оценки:

$$|u^j(x)| \leq C[1 + \varepsilon^{-j}\exp(\alpha\varepsilon^{-1}x)].$$

Д о к а з а т е л ь с т в о. Пусть $x < 0$. Представим уравнение (1a) в виде:

$$\left(\varepsilon u'(x)\exp\left[\int\limits_x^0 a(s)\varepsilon^{-1}ds\right]\right)' = \{c(x)u(x) + f(x)\}\exp\left[\int\limits_x^0 a(s)\varepsilon^{-1}ds\right]. \tag{1.4}$$

Пусть величина η такова, что $u(0) - u(-\varepsilon) = u'(\eta)\varepsilon$. Из этого уравнения и из того, что функция $u(x)$ ограничена равномерно по ε, следует, что $|u'(\eta)| \leq C\varepsilon^{-1}$. Интегрируя уравнение (1.4) от η до 0, получим $|u'(-0)| \leq C\varepsilon^{-1}$. Интегрируя (1.4) от x до 0, получим требуемую оценку при $j = 1$.

Дифференцируя уравнение (1a), вводя $p(x) = u'(x)$, представляя полученное уравнение в виде (1.4), получим аналогичным образом оценку при $j = 2$. Таким же образом можно рассмотреть случай других j. Лемма доказана.

Л е м м а 3 . Пусть функции $a(x), c(x)$ и $f(x)$ трижды непрерывно дифференцируемы. Тогда найдется постоянная C такая, что для $j = 1, 2, 3, 4$ при всех $x > 0$ справедливы оценки:

$$|u^j(x)| \leq C.$$

Утверждение леммы при $j = 1$ следует из представления производной в виде (1.3). При других j может использоваться аналогичное представление для других производных.

Итак, решение задачи (1) имеет внутренний экспоненциальный слой слева от точки $x = 0$ и не имеет больших градиентов по параметру ε правее точки $x = 0$.

Остановимся на вопросе переноса краевых условий из $\pm\infty$. Согласно подходу [10]-[11], предельное условие $\lim\limits_{x \to -\infty} u(x) = 0$ выделяет однопараметрическое семейство решений уравнения (1a) в соответствии с представлением:

$$\varepsilon u'(x) = \gamma_1(x)u(x) + \beta_1(x), \ x < 0, \tag{1.5}$$

где $\gamma_1(x)$ является решением сингулярной задачи Коши:

$$\varepsilon\gamma' - a(x)\gamma + \gamma^2 - c(x)\varepsilon = 0, \ \gamma(x) \to r_1, \ x \to -\infty, \tag{1.6}$$

r_1 - положительный корень уравнения:

$$\gamma^2 - a_1\gamma - c_1\varepsilon = 0,$$

функция $\beta_1(x)$ является решением сингулярной задачи Коши:

$$\varepsilon\beta_1' + \{\gamma_1(x) - a(x)\}\beta_1 = \varepsilon f(x), \quad \beta_1(x) \to 0, \ x \to -\infty. \tag{1.7}$$

Аналогично предельное краевое условие $\lim\limits_{x \to +\infty} u(x) = 0$ выделяет однопараметрическое семейство решений:

$$u'(x) = \gamma_2(x)u(x) + \beta_2(x), \tag{1.8}$$

где $\gamma_2(x)$ является решением сингулярной задачи Коши:

$$\varepsilon\gamma' - a(x)\gamma + \varepsilon\gamma^2 - c(x) = 0, \ \gamma(x) \to r_2, \ x \to +\infty, \tag{1.9}$$

r_2 - отрицательный корень уравнения:

$$\varepsilon\gamma^2 - a_2\gamma - c_2 = 0,$$

функция $\beta_2(x)$ является решением сингулярной задачи Коши:

$$\varepsilon\beta_2' - \{a(x) - \gamma_2(x)\varepsilon\}\beta_2 = f(x), \quad \beta_2(x) \to 0, \ x \to +\infty. \tag{1.10}$$

Используя соотношения (1.5) и (1.8) в (1б) в случае $f(x) = 0$, получим:

$$u(0) = \frac{Q}{\gamma_1(0) - \varepsilon\gamma_2(0)}. \tag{1.11}$$

Оценим вспомогательные функции $\gamma_1(x)$ и $\gamma_2(x)$.

Л е м м а 4 .

$$\textit{При всех } x \le 0 \ \gamma_1(x) \ge \alpha > 0, \quad \textit{при всех } x \ge 0 \ \ \gamma_2(x) \le r_0 < 0. \tag{1.12}$$

Д о к а з а т е л ь с т в о . Оцениваемые функции не зависят от $f(x)$, поэтому рассмотрим случай $f(x) = 0, \beta_1(x) = 0$. Исходя из соотношения (1.5) , для этого случая несложно получить:

$$u(x) = u(0)\exp\left[\int\limits_0^x \varepsilon^{-1}\gamma_1(x)dx\right].$$

Из принципа максимума следует, что при $x \le 0$

$$u(x) \le u(0)\exp[\alpha\varepsilon^{-1}x].$$

Из этих двух соотношений следует:

$$\int\limits_x^0 [\gamma_1(s) - \alpha]ds \ge 0$$

для произвольного $x \le 0$. Следовательно, $\gamma_1(0) \ge \alpha$.

Итак, $\lim\limits_{x\to-\infty}\gamma_1(x) \ge \alpha, \ \ \gamma_1(0) \ge \alpha$. Можно показать, что если s - точка локального экстремума функции $\gamma_1(x)$, то

$$\gamma_1(s) = \{a(s) + \sqrt{a(s)^2 + 4c(s)\varepsilon}\}/2 > \alpha.$$

Это доказывает, что $\gamma_1(x) \geq \alpha$. Второе неравенство в (1.12) доказывается аналогично. Лемма доказана.

Используя лемму 4 в (1.11), в случае $f(x) = 0$ получим:

$$0 < u(0) \leq Q/\{\alpha + |r_0|\varepsilon\}.$$

Учитывая соотношения (1.5),(1.8), от задачи (1) можно перейти к задаче на конечном интервале, содержащем точку $x = 0$:

$$Lu = \varepsilon u'' - a(x)u' - c(x)u = f(x),\ x \neq 0,$$

$$L_0 u = \varepsilon u'(+0) - \varepsilon u'(-0) = -Q,$$

$$\varepsilon u'(L_1) - \gamma_1(L_1)u(L_1) = \beta_1(L_1), \quad u'(L_2) - \gamma_2(L_2)u(L_2) = \beta_2(L_2). \quad (1.13)$$

По аналогии со случаем задачи (1) можно показать, что вследствие условий $\gamma_1(x) > 0, \quad \gamma_2(x) < 0$, к дифференциальному оператору для задачи (1.13) можно применять принцип максимума.

Функции γ_i и β_i, как решения соответствующих сингулярных задач Коши, могут быть найдены с некоторой погрешностью. Оценим влияние этой погрешности на решение задачи (1.13).

В случае $f(x) = 0$ можно получить более точный результат, поэтому рассмотрим этот случай отдельно.

Пусть $\tilde{u}(x)$ - решение задачи (1.13) в случае возмущенных значений $\tilde{\gamma}_i$ и $\tilde{\beta}_i$.

Т е о р е м а 1. Пусть $f(x) = 0,\ \beta_1(x) = \beta_2(x) = 0$. *Пусть*

$$|\tilde{\gamma}_1(L_1) - \gamma_1(L_1)| \leq \Delta_1,\ \tilde{\gamma}_1(L_1) \geq \alpha,\ |\tilde{\gamma}_2(L_2) - \gamma_2(L_2)| \leq \Delta_2, \quad \tilde{\gamma}_2(L_2) \leq 0.$$

Тогда при всех $x \in [L_1, L_2]$ *выполнится*

$$|u(x) - \tilde{u}(x)| \leq \Delta_1 \frac{Q}{\alpha^2} \exp[\alpha\varepsilon^{-1}L_1] + \varepsilon\Delta_2 \frac{Q}{\alpha^2} \exp[r_0 L_2 + \alpha\varepsilon^{-1}(x - L_2)] \ . \quad (1.14)$$

Д о к а з а т е л ь с т в о . Пусть $z = u - \tilde{u}$. Тогда:

$$Lz(x) = 0, \quad L_0 z(x) = 0,$$

$$-\varepsilon z'(L_1) + \tilde{\gamma}_1 z(L_1) = (\tilde{\gamma}_1 - \gamma_1)u(L_1), \quad z'(L_2) - \tilde{\gamma}_2 z(L_2) = (\gamma_2 - \tilde{\gamma}_2)u(L_2).$$

Определим

$$\Psi(x) = \tilde{\gamma}_1^{-1}\Delta_1|u(L_1)| + \alpha^{-1}\varepsilon\Delta_2|u(L_2)|\exp[\varepsilon^{-1}\alpha(x - L_2)] \pm z(x).$$

Нетрудно убедиться, что при всех $x \neq 0$

$$L\Psi(x) \leq 0, \quad L_0\Psi(x) \leq 0, \; -\varepsilon\Psi'(L_1) + \tilde{\gamma}_1\Psi(L_1) \geq 0, \quad \Psi'(L_2) - \tilde{\gamma}_2\Psi(L_2) \geq 0.$$

В силу принципа максимума $\Psi(x) \geq 0$ при всех x. Учитывая (1.2), получим утверждение теоремы.

Исходя из оценки (1.14), можно проанализировать, как погрешность, возникающую при приближенном решении задач (1.6) и (1.9), уменьшить за счет выбора L_1 и L_2. Из (1.14) следует, что с уменьшением параметра ε погрешность Δ_2 уменьшается линейным образом, а Δ_1 – экспоненциально.

При численном моделировании распространения примеси от точечного источника в ряде работ в качестве краевых условий задают условие совпадения концентрации примеси с фоновой или условие, что производная концентрации стала равной нулю. Проанализируем точность этих подходов в случае модельной задачи (1) и $Q > 0, f(x) = 0$ (когда действует только точечный источник).

Итак, рассмотрим различные способы задания краевых условий:

1. $\tilde{u}(L_1) = 0, \; \tilde{u}(L_2) = 0$. Задавая функцию:

$$\Psi(x) = |u(L_1)| + |u(L_2)| \exp[\varepsilon^{-1}\alpha(x - L_2)] \pm z(x), \quad z = u - \tilde{u},$$

на основании принципа максимума можем убедиться, что

$\Psi(x) \geq 0, \quad x \in [L_1, L_2]$. Следовательно, в данном случае при всех $x \in [L_1, L_2]$

$$|u(x) - \tilde{u}(x)| \leq \frac{Q}{\alpha}\exp\left\{\frac{\alpha}{\varepsilon}L_1\right\} + \frac{Q}{\alpha}\exp\left\{r_0 L_2 + \frac{\alpha}{\varepsilon}(x - L_2)\right\}. \qquad (1.15)$$

2. $\tilde{u}'(L_1) = 0, \; \tilde{u}'(L_2) = 0$. Это соответствует тому, что $\tilde{\gamma}_1(L_1) = 0, \; \tilde{\gamma}_2(L_2) = 0$. В соответствии с (1.14)

$$|u(x) - \tilde{u}(x)| \leq \gamma_1(L_1)\frac{Q}{\alpha^2}\exp\left\{\frac{\alpha}{\varepsilon}L_1\right\} + \varepsilon||c||\frac{Q}{\alpha^3}\exp\left\{r_0 L_2 + \frac{\alpha}{\varepsilon}(x - L_2)\right\}, \qquad (1.16)$$

где

$$\alpha < \gamma_1(L_1) \leq \sqrt{D^2 + 4||c||\varepsilon}.$$

3. $\tilde{u}(L_1) = 0, \; \tilde{u}'(L_2) = 0$. Нетрудно убедиться, что в данном случае

$$|u(x) - \tilde{u}(x)| \leq \frac{Q}{\alpha}\exp\left\{\frac{\alpha}{\varepsilon}L_1\right\} + \varepsilon||c||\frac{Q}{\alpha^3}\exp\left\{r_0 L_2 + \frac{\alpha}{\varepsilon}(x - L_2)\right\}. \quad (1.17)$$

Из сравнения (1.15)-(1.17) следует, что если не задавать краевые условия специальным образом, то меньшая погрешность будет при задании нулевого краевого условия Дирихле на левом конце конечного интервала (с "наветренной"стороны) и равенство нулю производной на правом конце интервала.

Рассмотрим случай без ограничения $f(x) = 0$. По аналогии с теоремой 1 можно доказать, что справедлива

Т е о р е м а 2. Пусть

$$|\tilde{\gamma}_1(L_1) - \gamma_1(L_1)| \le \Delta_1, \ |\tilde{\beta}_1(L_1) - \beta_1(L_1)| \le \Delta_1, \quad \tilde{\gamma}_1(L_1) \ge \alpha,$$

$$|\tilde{\gamma}_2(L_2) - \gamma_2(L_2)| \le \Delta_2, \ |\tilde{\beta}_2(L_2) - \beta_2(L_2)| \le \Delta_2, \quad \tilde{\gamma}_2(L_2) \le 0.$$

Тогда для некоторой постоянной C при всех $x \in [L_1, L_2]$ выполнится

$$|u(x) - \tilde{u}(x)| \le C\{\Delta_1 + \varepsilon\Delta_2 \exp[\alpha\varepsilon^{-1}(x - L_2)]\}. \qquad (1.18)$$

Теперь построим приближенные формулы для нахождения $\gamma_i(x)$ и $\beta_i(x)$ из соответствующих сингулярных задач Коши.

Определим

$$\tilde{\gamma}_1(x) = \{a(x) + \sqrt{a(x)^2 + 4c(x)\varepsilon}\}/2. \qquad (1.19)$$

Л е м м а 5. Пусть функции $a(x)$, $c(x)$ - непрерывно дифференцируемы. Тогда найдется $C > 0$ такое, что при всех $x \le 0$

$$|\gamma_1(x) - \tilde{\gamma}_1(x)| \le C\varepsilon.$$

Д о к а з а т е л ь с т в о. Пусть $z(x) = \gamma_1(x) - \tilde{\gamma}_1(x)$. Тогда

$$R_\varepsilon z = \varepsilon z' + [\gamma_1(x) + \tilde{\gamma}_1(x) - a(x)]z = -\varepsilon\tilde{\gamma}_1'(x), \quad \lim_{x\to-\infty} z(x) = 0.$$

В силу леммы 4

$$\gamma_1(x) + \tilde{\gamma}_1(x) - a(x) \ge \alpha.$$

Определим

$$\Psi(x) = \varepsilon\alpha^{-1}||\tilde{\gamma}_1'(x)|| \pm z(x).$$

Тогда

$$\lim_{x\to-\infty} \Psi(x) \ge 0, \quad R_\varepsilon\Psi(x) \ge 0, \quad x \in (-\infty, 0].$$

В силу принципа максимума $\Psi(x) \geq 0, \quad x \in (-\infty, 0]$. Следовательно, $|z(x)| \leq \varepsilon\alpha^{-1}||\tilde{\gamma}_1'(x)||$. Лемма доказана.

Определим

$$\tilde{\gamma}_2(x) = -2c(x)/\{a(x) + \sqrt{a(x)^2 + 4c(x)\varepsilon}\}. \tag{1.20}$$

Л е м м а 6. Пусть функции $a(x)$, $c(x)$ - непрерывно дифференцируемы. Тогда найдется $C > 0$ такое, что при всех $x \geq 0$

$$|\gamma_2(x) - \tilde{\gamma}_2(x)| \leq C\varepsilon.$$

Д о к а з а т е л ь с т в о. Пусть $z(x) = \gamma_2(x) - \tilde{\gamma}_2(x)$. Тогда

$$R_\varepsilon z(x) = \varepsilon z' - [a(x) - \varepsilon\gamma_2 - \varepsilon\tilde{\gamma}_2]z = -\varepsilon\tilde{\gamma}_2'(x), \quad \lim_{x\to\infty} z(x) = 0.$$

Для оператора R_ε справедлив принцип максимума:

$$\lim_{x\to\infty} \Psi(x) \geq 0,\ R_\varepsilon\Psi(x) \leq 0,\ 0 \leq x < \infty \Rightarrow \Psi(x) \geq 0,\ 0 \leq x < \infty.$$

Определим

$$\Psi(x) = \varepsilon\alpha^{-1}\|\tilde{\gamma}_2'\| \pm z(x).$$

В силу принципа максимума

$$|z(x)| \leq \varepsilon\alpha^{-1}\|\tilde{\gamma}_2'(x)\|.$$

Функция $\tilde{\gamma}_2'(x)$ ограничена равномерно по ε. Это доказывает лемму.

Определим

$$\tilde{\beta}_2(x) = -\frac{f(x)}{a(x)}. \tag{1.21}$$

Применяя принцип максимума к задаче (1.10), можно показать, что для некоторой постоянной C при всех $x > 0 \quad |\beta_2(x) - \tilde{\beta}_2(x)| \leq C\varepsilon$.

В соответствии с полученными оценками точность формул (1.19)-(1.21) увеличивается с уменьшением параметра ε. Использовать эти формулы применительно к задаче (1.13) можно для произвольных L_1 и L_2.

Задача (1.7) при задании $\tilde{\gamma}_1$ в соответствии с (1.19) принимает вид:

$$\beta_1' + d(x)\beta_1 = f(x), \quad \beta_1(x) \to 0,\ x \to -\infty,$$

$$d(x) = 2c(x)\{a(x) + \sqrt{a(x)^2 + 4\varepsilon c(x)}\}^{-1}. \tag{1.22}$$

Для достаточно больших $|x|$ функция $\beta_1(x)$ из (1.22) может быть определена на основе разложения в ряды по обратным степеням x [10]. Если при $x << 0$ справедливы представления:

$$d(x) \approx \sum_{i=0}^{N} d_i x^{-i}, \; f(x) \approx \sum_{i=0}^{N} f_i x^{-i},$$

то $\beta_1(x)$ может быть приближенно найдено в виде:

$$\beta_1(x) \approx \tilde{\beta}_1(x) = \sum_{i=0}^{N} \beta_i^0 x^{-i}.$$

Для этого необходимо подставить разложения $d, \; f, \; \beta_1$ в (1.22) и получим рекуррентную формулу относительно β_i^0. Более подробно данный подход изложен в [10]. В частности, если $\exists \; f_1 = \lim\limits_{x \to -\infty} xf(x)$, то $|\beta_1(x)| \leq C/|x|$. Если еще существуют пределы:

$$d_0 = \lim_{x \to -\infty} d(x), \; d_1 = \lim_{x \to -\infty} x(d(x) - d_0), \; f_2 = \lim_{x \to -\infty} x(xf(x) - f_1),$$

то можно определить $\tilde{\beta}_1(x) = f_1/(d_0 x)$ и при этом для некоторой постоянной C $|\beta_1(x) - \tilde{\beta}_1(x)| \leq C/x^2$.

Данный подход может быть применен к нахождению приближений для $\beta_2(L_2), \gamma_1(L_1)$ и $\gamma_2(L_2)$.

2. Построение и анализ разностной схемы

Остановимся на вопросе численного решения задачи (1.13). Согласно лемме 2 решение задачи (1.13) имеет внутренний экспоненциальный слой слева около точки $x = 0$. Следовательно, по крайней мере слева от точки $x = 0$, в случае равномерной сетки, целесообразно использовать схему экспоненциальной подгонки [5]. Пусть Ω - равномерная сетка интервала $[L_1, L_2]$:

$$\Omega = \{x_n : \; x_n = x_{n-1} + h, \; x_0 = L_1, \; x_N = L_2, \;\; x_M = 0\}.$$

При аппроксимации $u'(-0)$ учтем экспоненциальный рост решения.

В результате получим разностную схему:

$$L_n^h u^h = \varepsilon_n \frac{u_{n+1}^h - 2u_n^h + u_{n-1}^h}{h^2} - a_n \frac{u_{n+1}^h - u_{n-1}^h}{2h} - c_n u_n^h = f(x_n),$$

$$n = 1, 2, ..., N-1, \quad n \neq M \ ,$$

$$L_M^h u^h = \varepsilon \frac{u_{M+1}^h - u_M^h}{h} - \tilde{\varepsilon} \frac{u_M^h - u_{M-1}^h}{h} = -Q \quad ,$$

$$L_0^h u^h = -\varepsilon \frac{u_1^h - u_0^h}{h} + \gamma_1(L_1) u_0^h = -\beta_1(L_1),$$

$$L_N^h u^h = \frac{u_N^h - u_{N-1}^h}{h} - \gamma_2(L_2) u_N^h = \beta_2(L_2), \tag{2.1}$$

где

$$\varepsilon_n = \frac{a_n h}{2} \operatorname{cth} \frac{a_n h}{2\varepsilon}, \quad \tilde{\varepsilon} = \frac{a_M h}{1 - \exp(-a_M \varepsilon^{-1} h)}, \quad a_n = a(x_n), \ c_n = c(x_n). \tag{2.2}$$

Схема (2.1) является обобщением схемы из [5] на случай краевых условий третьего рода и на случай скачка производной для некоторой внутренней точки.

Используя полученные оценки производных, оценивая погрешность аппроксимации в каждом узле сетки, подбирая подходящую барьерную сеточную функцию и используя принцип максимума по аналогии с [6] можно показать, что справедлива

Т е о р е м а 3. Пусть $u(x)$ - решение задачи (1.13), u^h- решение схемы (2.1). Тогда найдется постоянная C такая, что при всех

$n \in \{0, 1, ...N\}$ выполнится

$$|u_n^h - u(x_n)| \leq Ch.$$

Докажем устойчивость схемы (2.1) к возмущению $\gamma_1(L_1), \beta_1(L_1)$ и $\gamma_2(L_2), \beta_2(L_2)$. Такой анализ необходим в связи с тем, что эти функции находятся приближенно. Пусть $\tilde{u}^h$ - решение разностной схемы (2.1) в случае возмущенных значений $\tilde{\gamma}_i$ и $\tilde{\beta}_i$.

Т е о р е м а 4. Пусть $f(x) = 0, \ \beta_1(x) = \beta_2(x) = 0$. Пусть

$$|\tilde{\gamma}_1(L_1) - \gamma_1(L_1)| \leq \Delta_1, \ \tilde{\gamma}_1(L_1) \geq \alpha, \ \ |\tilde{\gamma}_2(L_2) - \gamma_2(L_2)| \leq \Delta_2, \ \tilde{\gamma}_2(L_2) \leq 0 \ .$$

Тогда для постоянной C, соответствующей оценке сходимости в теореме 3, при всех $n \in \{0, 1, ..., N\}$ выполнится

$$|u_n^h - \tilde{u}_n^h| \leq \Delta_1 \alpha^{-1} \{Q\alpha^{-1} \exp(\alpha \varepsilon^{-1} L_1) + Ch\} +$$

$$+\Delta_2 (2\varepsilon + \alpha h)\alpha^{-1} \{Q\alpha^{-1} \exp(r_0 L_2) + Ch\} \exp\{\alpha(2\varepsilon + \alpha h)^{-1}(x_n - L_2)\}. \quad (2.3)$$

Доказательство. Пусть $z^h = u^h - \tilde{u}^h$. Тогда

$$L_n^h z^h = \varepsilon_n \frac{z_{n+1}^h - 2z_n^h + z_{n-1}^h}{h^2} - a_n \frac{z_{n+1}^h - z_{n-1}^h}{2h} - c_n z_n^h = 0,$$

$$n = 1, 2, ..., N-1, \quad n \neq M \ ,$$

$$L_M^h z^h = \varepsilon \frac{z_{M+1}^h - z_M^h}{h} - \tilde{\varepsilon} \frac{z_M^h - z_{M-1}^h}{h} = 0 \quad ,$$

$$L_0^h z^h = -\varepsilon \frac{z_1^h - z_0^h}{h} + \tilde{\gamma}_1(L_1) z_0^h = (\tilde{\gamma}_1 - \gamma_1) u_0^h,$$

$$L_N^h z^h = \frac{z_N^h - z_{N-1}^h}{h} - \tilde{\gamma}_2(L_2) z_N^h = (\gamma_2 - \tilde{\gamma}_2) u_N^h.$$

Определим ϕ^h:

$$\phi_n^h = \left(1 + \frac{\alpha h}{2\varepsilon}\right)^{n-N}.$$

Покажем, что при всех $n = 1, 2, ..., N-1$

$$L_n^h \phi^h \leq 0. \quad (2.4)$$

Пусть $n \neq M$. Тогда $L_n^h \phi^h$ можно записать в виде:

$$L_n^h \phi^h = \left(\varepsilon_n - \frac{a_n h}{2}\right) \frac{\phi_{n+1}^h - 2\phi_n^h + \phi_{n-1}^h}{h^2} - a_n \frac{\phi_n^h - \phi_{n-1}^h}{h} - c_n \phi_n^h.$$

Нетрудно показать, что при $x > 0$ $x \times cth(x) \leq 1 + x$. Следовательно,

$$\varepsilon_n - \frac{a_n h}{2} \leq \varepsilon.$$

С учетом этого неравенства можно получить:

$$L_n^h \phi^h \leq (4\varepsilon + 2\alpha h)^{-1} (\alpha^2 - 2a_n \alpha) \phi_n^h \leq 0.$$

Пусть $n = M$. Для $x > 0$

$$\frac{x}{1-\exp(-x)} \geq 1 + \frac{x}{2}.$$

Следовательно,

$$\tilde{\varepsilon} \geq \varepsilon + \frac{a_M h}{2}.$$

Поэтому

$$L_M^h \phi^h \leq \varepsilon \frac{\phi_{M+1}^h - 2\phi_M^h + \phi_{M-1}^h}{h} - \frac{a_M}{2}(\phi_M^h - \phi_{M-1}^h) \leq 0.$$

Итак, при всех $n = 1, 2, ..., N-1$ справедливы неравенства (2.4).

Нетрудно убедиться, что

$$\frac{\phi_N^h - \phi_{N-1}^h}{h} - \tilde{\gamma}_2(L_2)\phi_N^h \geq \frac{\alpha}{2\varepsilon + \alpha h}. \tag{2.5}$$

Определим сеточную функцию:

$$\Psi_n^h = \alpha^{-1}\Delta_1|u_0^h| + \alpha^{-1}(2\varepsilon + \alpha h)\Delta_2|u_N^h|\phi_n^h \pm z_n^h.$$

Тогда с учетом оценок (2.4),(2.5) получим:

$$L_n^h \Psi^h \leq 0, \quad n = 1, 2, ..., N-1 \quad ,$$

$$-\varepsilon\frac{\Psi_1^h - \Psi_0^h}{h} + \tilde{\gamma}_1(L_1)\Psi_0^h \geq 0, \quad \frac{\Psi_N^h - \Psi_{N-1}^h}{h} - \tilde{\gamma}_2(L_2)\Psi_N^h \geq 0.$$

В силу принципа максимума $\Psi_n^h \geq 0$ при всех n. Учитывая теорему 3 и оценку (1.2), получим утверждение теоремы.

Рассмотрим случай, когда не наложено ограничение $f(x) = 0$. По аналогии с предыдущей теоремой несложно показать, что если

$$|\tilde{\gamma}_1(L_1) - \gamma_1(L_1)| \leq \Delta_1, \ |\tilde{\beta}_1(L_1) - \beta_1(L_1)| \leq \Delta_1, \quad \tilde{\gamma}_1(L_1) \geq \alpha,$$

$$|\tilde{\gamma}_2(L_2) - \gamma_2(L_2)| \leq \Delta_2, \ |\tilde{\beta}_2(L_2) - \beta_2(L_2)| \leq \Delta_2, \quad \tilde{\gamma}_2(L_2) \leq 0,$$

то для некоторой постоянной C при всех $x_n \in \Omega$ выполнится

$$|u_n^h - \tilde{u}_n^h| \leq C\{\Delta_1 + (\varepsilon + h)\Delta_2 \exp[\alpha(2\varepsilon + \alpha h)^{-1}(x_n - L_2)]\}.$$

Если задан источник в виде δ- функции, то можно не переходить к соотношению (1б) на скачок производной, а ввести для этой функции некоторую аппроксимацию на сетке [12]. Выпишем для такого случая схему экспоненциальной подгонки:

$$\varepsilon_n \frac{u^h_{n+1} - 2u^h_n + u^h_{n-1}}{h^2} - a_n \frac{u^h_{n+1} - u^h_{n-1}}{2h} - c_n u^h_n = f(x_n) + F^h_n,$$

$$\varepsilon \frac{u^h_1 - u^h_0}{h} - \gamma_1(L_1)u^h_0 = \beta_1(L_1), \quad \frac{u^h_N - u^h_{N-1}}{h} - \gamma_2(L_2)u^h_N = \beta_2(L_2), \quad (2.6)$$

где ε_n соответствует (2.2), $a_n = a(x_n)$, $c_n = c(x_n)$, $n = 1, 2, ..., N-1$,

$$F^h_n = \begin{cases} -Q/h, & \text{если } x_n = 0, \\ 0, & \text{если } x_n \neq 0. \end{cases}$$

Монотонной схеме А.А. Самарского [13] в (2.6) соответствует

$$\varepsilon_n = \frac{\varepsilon}{1 + a_n h/(2\varepsilon)},$$

схеме направленных разностей –

$$\varepsilon_n = \varepsilon + \frac{a_n h}{2}.$$

Остановимся на результатах численных экспериментов. Были проведены численные эксперименты для краевой задачи:

$$\varepsilon u'' - u' - u + \delta(x) = 0, \quad \lim_{x \to -\infty} u(x) = 0, \quad \lim_{x \to +\infty} u(x) = 0, \quad (2.7)$$

где $\delta(x)$ - дельта-функция Дирака. Точное решение этой задачи выписывается в явном виде [4,стр. 29]:

при $x \leq 0$

$$u(x) = [1 + 4\varepsilon]^{-0.5} \exp[(1 + \sqrt{1 + 4\varepsilon})/(2\varepsilon)x],$$

при $x \geq 0$

$$u(x) = [1 + 4\varepsilon]^{-0.5} \exp[-2/(1 + \sqrt{1 + 4\varepsilon})x].$$

Сначала задача (2.7) сводилась к интервалу $[-1, 1]$. В случае схемы (2.1) численно исследовалась точность схемы в зависимости от способа задания краевых условий. Задавались условия Дирихле (перенос нулевых краевых условий из $\pm\infty$), условия Неймана (аппроксимация условий равенства нулю производных на концах интервала) и специальные краевые условия (учитывающие $\tilde{\gamma}_1$ и $\tilde{\gamma}_2$ из (1.19) и (1.20)). В табл. 1 приведена норма погрешности в зависимости от ε и способа задания краевых условий при $h = 0.01$.

Таблица 1.

ε	способ задания краевых условий		
	Дирихле	Неймана	специальные условия
1.0	0.24	0.25	0.17E-1
1.0E-1	0.34	0.32E-1	0.38E-2
1.0E-2	0.36	0.75E-2	0.41E-2
1.0E-3	0.37	0.55E-2	0.19E-2
1.0E-4	0.37	0.55E-2	0.18E-2
1.0E-5	0.37	0.55E-2	0.18E-2

Из табл. 1 следует, что наименьшая погрешность – при задании краевых условий с приближенными значениями γ_1 и γ_2 из (1.19) и (1.20). Значительна погрешность в случае краевых условий Дирихле.

Далее исследовалась точность схемы (2.1) с $\tilde{\gamma}_1$ и $\tilde{\gamma}_2$ из (1.19) и (1.20) в зависимости от шага сетки. Задача решалась на интервале [-5,5]. В табл. 2 приведена норма погрешности в зависимости от ε и шага сетки.

Таблица 2.

ε	шаг сетки		
	0.1	0.05	0.01
1.0	0.14E-1	0.69E-2	0.14E-2
1.0E-1	0.34E-1	0.18E-1	0.38E-2
1.0E-2	0.18E-1	0.11E-1	0.41E-2
1.0E-3	0.18E-1	0.90E-2	0.19E-2
1.0E-4	0.18E-1	0.90E-2	0.18E-2
1.0E-5	0.18E-1	0.90E-2	0.18E-2

Данные табл. 2 подтверждают равномерную сходимость схемы (2.1) со скоростью $O(h)$. В табл. 3 для сравнения при тех же условиях приведена погрешность для схемы (2.6). Из табл. 3 следует, что если не вводить аппроксимацию условия (1б) скачка производной при $x = 0$, то точность схемы экспоненциальной подгонки при определенных ε становится хуже. Подтверждается так же, что если аппроксимировать (1б) без учета экспоненциального роста решения, то точность схемы существенно снижается.

Теперь сравним различные схемы без учета соотношения (1б). Остановимся на случае интервала $[-5, 5]$, $h = 0.01$, γ_1, γ_2 соответствуют (1.19) и (1.20). В табл. 4 приведена норма погрешности различных схем в зависимости от параметра ε.

Таблица 3.

ε	шаг сетки		
	0.1	0.05	0.01
1.0	0.60E-3	0.15E-3	0.61E-4
1.0E-1	0.13E-1	0.32E-2	0.27E-3
1.0E-2	0.72E-1	0.25E-1	0.16E-2
1.0E-3	0.89E-1	0.46E-1	0.79E-2
1.0E-4	0.91E-1	0.47E-1	0.97E-2
1.0E-5	0.91E-1	0.47E-1	0.99E-2

Таблица 4.

ε	Схема направленных разностей	Схема А.А. Самарского	Схема экспоненциальной подгонки
1.0	0.84E-3	0.59E-4	0.61E-4
1.0E-1	0.12E-1	0.31E-3	0.27E-3
1.0E-2	0.12	0.29E-1	0.16E-2
1.0E-3	0.89E-1	0.16E-1	0.79E-2
1.0E-4	0.99E-2	0.97E-2	0.97E-2
1.0E-5	0.99E-2	0.99E-2	0.99E-2

Список литературы

[1] Пененко В.В. Методы численного моделирования атмосферных процессов. Л.: Гидрометеоиздат, 1981.

[2] Пененко В.В., Алоян А.Е.Модели и методы для задач охраны окружающей среды. Новосибирск: Наука, 1985.

[3] Арраго Л.Р., Швец М.Е. К вопросу распространения тяжелой однородной примеси из высотного источника // Труды ГГО, 1963, N 15, с. 41-51.

[4] Марчук Г.И. Математическое моделирование в проблеме окружающей среды. М.: Наука, 1982.

[5] Ильин А.М.Разностная схема для дифференциального уравнения с малым параметром при старшей производной// Матем. заметки. 1969. Т.6, N 2. С. 237-248.

[6] Kellogg R.B.,Tsan A.Analysis of some difference approximations for a singular perturbation problems without turning points// Math.Comput.1978.V.32,N 144. P. 1025-1039.

[7] Дулан.Э.,Миллер Д.,Шилдерс У. Равномерные численные методы решения задач с пограничным слоем. М.: Мир, 1983.

[8] Задорин А.И.,Игнатьев В.Н. Численное решение квазилинейного сингулярно возмущенного уравнения второго порядка// Ж. вычисл.матем. и матем. физ. 1991.Т.31,N 1. С. 157-160.

[9] Лисейкин В.Д., Петренко В.Е. Адаптивно - инвариантный метод численного решения задач с пограничными и внутренними слоями. Новосибирск,1989.

[10] Биргер Е.С., Ляликова Н.Б. О нахождении для некоторых систем обыкновенных дифференциальных уравнений решений с заданным условием на бесконечности// Ж. вычисл. матем. и матем. физ. 1965. Т.5, N 6. С. 979-990.

[11] Абрамов А.А., Балла К., Конюхова Н.Б. Перенос граничных условий из особых точек для систем обыкновенных дифференциальных уравнений // Сообщ. по вычисл. матем. М.: ВЦ АН СССР, 1981

[12] Берлянд М.Е. Современные проблемы атмосферной диффузии и загрязнения атмосферы. Л.: Гидрометеоиздат, 1975.

[13] Самарский А.А. Теория разностных схем. М.: Наука, 1983.