ЧИСЛЕННОЕ РЕШЕНИЕ КВАЗИЛИНЕЙНОГО СИНГУЛЯРНО ВОЗМУЩЕННОГО УРАВНЕНИЯ ВТОРОГО ПОРЯДКА

Задорин А.И. , Игнатьев В.Н.

(ЖВМ и МФ, 1991, т.31, №1, с. 157-160)

Рассмотрим исходную краевую задачу:

$$Lu(x) = \varepsilon u''(x) + u(x)u'(x) - b(x)u(x) = f(x), \quad u(0) = A, \; u(1) = B. \quad (1.1)$$

Предполагаем, что

$$b(x) \geq \beta > 0, \; 1 \geq \varepsilon > 0, \; b, b \in C^1[0,1], \; u_0(x) \geq \alpha > 0,$$

где $u_0(x)$ - решение соответствующей вырожденной задачи с условием $u_0(1) = B$.

Согласно [1], при сделанных предположениях решение задачи (1.1) ссуществует и единственно.

Разностные методы решения задачи (1.1) исследовались в [2]-[5]. В [2] предполагалось, что $u(x) \geq \alpha > 0$, и решение находилось на основе построения разностной схемы для последовательности линеаризованных задач. В [3] строилась разностная схема, учитывающая экспоненциальный погранслойный рост решения, анализировались вопросы существования и единственности решения схемы. В [5] для квазилинейного уравнения с малым параметром в предположении, что коэффициент при первой производной строго положителен, построена схема и обоснована ее сходимость в норме L_1.

В данном разделе построим разностную схему для задачи (1.1) с учетом погранслойного поведения решения.

В соответствии с [1] для решения задачи (1.1) справедливо асимптотическое представление

$$u(x) = u_0(x) + V_\varepsilon(x) + \alpha_\varepsilon(x), \quad (1.2)$$

где $|\alpha_\varepsilon(x)| \leq C\varepsilon, \; V_\varepsilon(x)$ - погранслойная функция, удовлетворяющая уравнению и условиям:

$$\varepsilon V''_\varepsilon(x) + (k + V_\varepsilon)V_\varepsilon 6' = 0, \quad V_\varepsilon(0) = -k, \; k = u_0(0), \; k > 0,$$

$$V_\varepsilon(x) \to 0 \;\text{ при }\; x\varepsilon^{-1} \to \infty. \quad (1.3)$$

Функция $V_\varepsilon(x)$ имеет вид:

$$V_\varepsilon(x) = -k + k \times \mathrm{th}[kx/(2\varepsilon)].$$

Выпишем оценку устойчивости для дифференциального оператора L_ε [6]:

$$||u - v||_1 \le \beta^{-1}||Lu - Lv||_1, \tag{1.4}$$

где u и v - две произвольные дважды непрерывно дифференцируемые функции, совпадающие на концах интервала. и введена норма:

$$||u||_1 = \int\limits_0^1 |u(x)|dx.$$

При построении разностной схемы для задачи (1.1) будем стремиться, чтобы схема учитывала особенности в поведении решения и чтобы для разностного аналога была справедлива оценка устойчивости вида (1.4).

Определим равномерную сетку исходного интервала:

$$\Omega = \{x_n : \ x_n = x_{n-1} + h, \ x_0 = 0, \ x_{N+1} = 1\}.$$

Нетрудно убедиться, что точная разностная схема для уравнения (1.3) имеет вид:

$$\varepsilon_n^0 \lambda_{xx} V_n^h + (k + V_n^h)\lambda_x V_n^h = 0, \tag{1.5}$$

где

$$\varepsilon_n^0 = \frac{kh}{2} \coth\left[\frac{kh}{2\varepsilon}\right],$$

$$\lambda_x V_n^h = \frac{V_{n+1}^h - V_{n-1}^h}{2h}, \quad \lambda_{xx} V_n^h = \frac{V_{n+1}^h - 2V_n^h + V_{n-1}^h}{h^2}, \ n = 1, 2, ..., N.$$

С учетом (1.5) выпишем разностную схему для задачи (1.1):

$$L_n^h u^h = \varepsilon_n \lambda_{xx} u_n^h + u_n^h \lambda_x u_n^h - b_n u_n^h = f_n, \tag{6}$$

$$u_0^h = 0, \quad u_{N+1}^h = B, \ n = 1, 2, ..., N, \tag{1.6}$$

где $b_n = b(x_n), \ f_n = f(x_n)$,

$$\varepsilon_n = \frac{\phi_\varepsilon(x_n)h}{2} \coth\left[\frac{\phi_\varepsilon(x_n)h}{2\varepsilon}\right],$$

Предполагаем, что $\phi_\varepsilon(x)$ удовлетворяет ограничениям

$$|\phi_\varepsilon(0)-k|\le C\varepsilon,\quad |\phi_\varepsilon(x)-\phi_\varepsilon(0)|\le Cx,$$

$$|u(x)|\le\phi_\varepsilon(x),\quad |u_n^h|\le\phi_\varepsilon(x_n),\ n=1,2,...,N.$$

В качестве $\phi_\varepsilon(x)$ можно выбрать верхнюю границу для решения:

$$\phi_\varepsilon(x)=k+C_0(x+\varepsilon),\ \text{где } C_0\ge|u_0'(x)|.$$

Определим две векторные нормы:

$$||P^h||_C=\max_{1\le j\le N}|P_j^h|, ||P^h||_1=h\sum_{j=1}^{N}|P_j^h|,$$

Под нормами матриц будем понимать нормы, согласованные с соответствующими векторными нормами, при тех же обозначениях. Определим

$$M=\{P^h\in R^{N+2}:|P_n^h|\le\phi_\varepsilon(x_n),\ n=1,2,...,N\}.$$

Л е м м а. Пусть q^h и v^h - две произвольные сеточные функции из M такие, что $q_0^h=v_0^h,\ q_{N+1}^h=v_{N+1}^h$. Тогда при всех $h\le h_0$ (h_0 не зависит от ε) найдется C такое, что

$$||q^h-v^h||_1\le C||L^hq^h-L^hv^h||_1.$$

Д о к а з а т е л ь с т в о. Линеаризованный оператор для L^h имеет вид

$$DL_n^h(z^h)P^h=\varepsilon_n\lambda_{xx}P_n^h+z_n^h\lambda_xP_n^h-(b_n-\lambda_xz_n^h)P_n^h,$$

где $z^h,P^h\in R^{N+2},\ n=1,2,...,N$. Теперь определим

$$\Delta L_n^h(q^h,v^h)=\int\limits_0^1 DL_n^h[v^h+s(q^h-v^h)]ds.$$

Тогда

$$L_n^hq^h-L_n^hv^h=\Delta L_n^h(q^h,v^h)(q^h-v^h), \tag{1.7}$$

где $n=1,2,...,N$.

Для произвольной сеточной функции P^h имеем:

$$\Delta L_n^h(q^h,v^h)P^h=\varepsilon_n\lambda_{xx}P_n^h+\frac{q_n^h+v_n^h}{2}\lambda_xP_n^h-$$

$$-\left(b_n - \frac{q^h_{n+1}+v^h_{n+1}}{4h} + \frac{q^h_{n-1}+v^h_{n-1}}{4h}\right) P^h_n, \quad n=1,2,...,N.$$

Даллее будем предполагать, что $P^h_0 = P^h_{N+1} = 0$.

Пусть Q – матрица порядка $N \times N$, соответствующая разностному оператору $\Delta L^h_n(q^h, v^h)$, $n = 1,2,...,N$. Нетрудно убедиться, что матрица Q имеет диагональное преобладание по столбцам на величину δ, если при всех n будет $b_n - \lambda_{xx}\varepsilon_n \geq \delta > 0$. Этого неравенства можно добиться, ограничив $h \leq h_0$, где h_0 не зависит от ε. Тогда матрица Q^T будет иметь строгое диагональное преобладание по строкам на величину δ, и в соответствии с [7, с. 41],

$$||P^h||_C \leq \delta^{-1}||Q^T\bar{P}^h||_C, \tag{1.8}$$

где $\bar{P}^h \in R^N$; $\bar{P}^h_n = P^h_n$ для $n = 1,2,...,N$. Учитывая, что для произвольной невырожденной матрицы G

$$||G||_1 = ||G^T||_C, \quad (G^{-1})^T = (G^T)^{-1},$$

исходя из(1.8), получаем $||Q^{-1}||_1 \leq \delta^{-1}$. Следовательно,

$$||\bar{P}^h||_1 \leq \delta^{-1}||Q\bar{P}^h||_1.$$

Применив это неравенство к (1.7), приняв $P^h = q^h - v^h$, получим утверждение леммы.

Т е о р е м а .Пусть u^h– решение системы (1.6). Тогда

$$||u^h - [u]_\Omega||_1 \leq Ch,$$

где $[u]_\Omega$ – проекция решения задачи (1.1) на сетку Ω.

Д о к а з а т е л ь с т в о. Согласно (1.2), в решении $u(x)$ можно выделить погранслойную составляющую V_ε:

$$u(x) = V_\varepsilon(x) + P_\varepsilon(x), \tag{1.9}$$

содержащую основной рост решения [1]:

$$\left|\frac{d^j u}{dx^j}\right| \leq C[1 + \varepsilon^{-j}\exp(-\tau\varepsilon^{-1}x)],$$

$$\left|\frac{d^j P_\varepsilon}{dx^j}\right| \leq C[1 + \varepsilon^{1-j}\exp(-\tau\varepsilon^{-1}x)], \ \tau > 0, \ j = 1,2,3.$$

Выпишем погрешность аппроксимации схемы (1.6):

$$R_n = Lu_n - L_n^h[u]_\Omega = \varepsilon u_n'' + u_n u_n' - \varepsilon_n \lambda_{xx} u_n - u_n \lambda_x u_n,\ u_n = u(x_n).$$

Учитывая соотношения (1.5),(1.2),(1.9), получим:

$$R_n = [\phi_\varepsilon(x_n) - k](V_n' - \lambda_x V_n) + \alpha_\varepsilon(x_n)(V_n' - \lambda_x V_n) + u_n(P_n' - \lambda_x P_n) +$$

$$+ (*\varepsilon_n^0 - \varepsilon_n)\lambda_{xx} V_n + \varepsilon(P_n'' - \lambda_{xx} P_n) + (\varepsilon - \varepsilon_n)\lambda_{xx} P_n,\ \ V_n = V_\varepsilon(x_n),\ P_n = P_\varepsilon(x_n). \tag{1.10}$$

Нетрудно убедиться, что

$$|\varepsilon - \varepsilon_n| \le Ch, \quad |\varepsilon_n - \varepsilon_n^0| \le |\phi_\varepsilon(x_n) - k|h/2. \tag{1.11}$$

Согласно [8], для произвольной достаточно гладкой функции $w(x)$ справедливы оценки:

$$|\lambda_{xx} w_n - w_n''| \le \int\limits_{x_{n-1}}^{x_{n+1}} |w'''(s)| ds,$$

$$h|\lambda_{xx} w_n|,\ |\lambda_{xx} w_n - w_n'| \le \int\limits_{x_{n-1}}^{x_{n+1}} |w''(s)| ds,\ w_n = w(x_n). \tag{1.12}$$

Рассмотрим отдельно случаи $n = 1$ и $n \ge 2$. Gecnm $n \ge 2$. Тогда из (1.10) с учетом оценок (1.11),(1.12), представления решения (1.9) и того, что

$$\sinh(t) \le Ct(1+t)^{-1}\exp(t) \text{ при } t > 0,$$

следует, что

$$|R_n| \le C[(h\eta^{-1}\varepsilon^{-1}x_n + h\eta^{-1})\exp(-\tau\varepsilon^{-1}x_{n-1}) + h], \tag{1.13}$$

где $\eta = \max(h, \varepsilon)$. Учитывая, что $x_{n-1} \ge x_n/2$ и вновь обозначая $\tau/2$ через τ, принимая во внимание ограниченность функции $t\exp(-t)$ при $t > 0$, из (1.13) получаем

$$|R_n| \le Ch\eta^{-1}\exp(-\tau\varepsilon^{-1}x_n) + h,$$

В случае $n = 1$, учитывая явный вид функции $V_\varepsilon(x)$, получаем $|R_1| \le C$.

Итак, во всех узлах сетки получена оценка погрешности аппроксимации. Оценим норму этой погрешности:

$$||R||_1 = h\sum_{j=1}^{N}|R_j| \le Ch + \frac{Ch^2}{\eta}\sum_{j=2}^{N}\exp(-\tau\varepsilon^{-1}x_j) \le$$

$$\le C\{h + h^2\eta^{-1}[1-\exp(-\tau\varepsilon 6{-}1h)]^{-1}\} \le Ch.$$

Учитывая, что $R_n = L_n^h u^h - L_n^h[u]_\Omega$, и используя лемму при $h \le h_0$, получаем утверждение теоремы. В случае $h \ge h_0$ требуемая оценка следует из того, xnj $||u^h||_1 + ||u||_1 \le C$. Теорема доказана.

Разностная схема (1.6) представляет собой нелинейную систему алгебраических уравнений. Методы решения таких уравнений исследованы, например, в [9]. При заданной функции $\phi_\varepsilon(x)$ требуется $k = u_0(0)$. Для этого можно воспользоваться аппроксимацией с точностью $O(h)$ вырожденного уравнения:

$$u^h_{0,n-1} = u^h_{0n} - hb(x_n) - hf(x_n)(u^h_{0n})^{-1},\quad u^h_{0,N+1} = B,\ n = N+1, N, ..., 2, 1. \tag{1.14}$$

Остановимся на результатах численных экспериментов. Для анализируемых краевых задач в качестве точного решения принималось решение известной схемы [4] на достаточно мелкой сетке, $h = 0.001$. Причем точность такого решения при малых ε контролировалась с помощью асимптотического приближения к решению. Явный вид разностной схемы из [4] применительно к задаче (1.1) следующий:

$$\varepsilon_n\lambda_{xx}u_n^h + ((u^h_{n+1})^2 - (u^h_n)^2)/(2h) - b(x_n)u_n^h = f(x_n),$$

$$u_0^h = 0,\quad u^h_{N+1} = B,\quad n = 1, 2, ..., N. \tag{1.15}$$

Для нахождения решения разностной схемы использовались методы линеаризации Ньютона и Пикара. В качестве начального приближения принимались асимптотическое приближение и решение в виде линии между заданными краевыми условиями. В обоих случаях методы Ньютона и Пикара сходились при всех испытываемых значениях ε и h. Как и следовало ожидать, метод Ньютона сходился быстрее, особенно если в качестве начальной итерации задавать асимптотическое приближение к решению. Например, при $\varepsilon = 0.1$ максимальная погрешность между двумя соседними итерациями была порядка 10^{-12} через 4-5 итераций.

Рассмотрим краевую задачу

$$\varepsilon u'' + uu' - u = 0, \quad u(0) = 0, \ u(1) = 2.$$

В этом случае при задании $\phi_\varepsilon(x)$ следует использовать $k = 1$, $C_0 \geq 1$. В табл. 1 приведено сравнение схемы (1.6) при $C_0 = 1$ со схемой (1.15) при различных значениях ε, $h = 0.025$. В табл. 1-3 приведены при каждом значении ε последовательно $||z^h||_C$ (верхнее число) и $||z^h||_1$ (нижнее число), где $z^h = u^h - [u]_\Omega$, u^h- решение испытываемой схемы, $u-$ точное решение.

Остановимся на примере

$$\varepsilon u'' + uu' - u = \exp(x), \quad u(0) = 0, \ u(1) = 5.$$

В данном случае значение $k = u_0(0)$ считалось по (1.14). Вычисление k по схеме второго порядка аппроксимации для вырожденного уравнения не привело к существенным изменениям результатов. В табл. 2 приведены нормы погрешности при различных ε для схемы (1.15), а также для схемы (1.6) с $C_0 = 1, \ 2$. Анализ табл. 1 и табл. 2 показывает, что схема из [4] уступает по точности построенной схеме (1.6). В табл. 3 для схемы (1.6) при $C_0 = 1$ приведены нормы погрешности при различных ε и h. Данные этой таблицы подтверждают равномерную сходимость схемы (1.6) в обеих анализируемых нормах.

Таблица 1.

Схема	ε				
	1.0	1.0E-1	1.0E-2	1.0E-3	1.0E-4
(1.15)	0.43E-2	0.11E-1	0.15	0.29E-1	0.76E-2
	0.27E-2	0.30E-2	0.85E-2	0.40E-2	0.34E-2
(1.6),$C_0 = 1$	0.20E-3	0.29E-3	0.55E-2	0.13E-2	0.43E-3
	0.12E-3	0.10E-3	0.30E-3	0.17E-3	0.15E-3

Таблица 2.

Схема	ε				
	1.0	1.0E-1	1.0E-2	1.0E-3	1.0E-4
(1.15)	0.21E-1	0.42E	0.17	0.16E-1	0.16E-1
	0.12E-1	0.51E-1	0.16E-1	0.82E-2	0.89E-2
(1.6),$C_0 = 1$	0.13E-2	0.35E-2	0.16E-1	0.25E-1	0.25E-1
	0.56E-3	0.12E-2	0.34E-2	0.42E-2	0.42E-2
(1.6),$C_0 = 2$	0.51E-2	0.49E-1	0.41E-1	0.23E-1	0.21E-1
	0.27E-2	0.45E-2	0.52E-2	0.46E-2	0.45E-2

Таблица 3.

h	ε				
	1.0	1.0E-1	1.0E-2	1.0E-3	1.0E-4
0.1	0.47E-2	0.20E-1	0.41E-1	0.50E-1	0.50E-1
	0.23E-2	0.50E-2	0.90E-2	1.0E-2	1.0E-2
0.05	0.13E-2	0.35E-2	0.16E-1	0.25E-1	0.25E-1
	0.50E-3	0.12E-2	0.34E-2	0.42E-2	0.42E-2
0.025	0.54E-3	0.86E-2	0.43E-2	0.12E-1	0.12E-1
	0.24E-3	0.91E-3	0.13E-2	0.18E-2	0.18E-2

1. Васильева А.Б., Бутузов В.Ф. Асимптотические разложения решений сингулярно возмущенных уравнений. М.: Наука, 1973.

2. Емельянов К.В. Приближенное решение сингулярно возмущенной краевой задачи с сильной нелинейностью: Препринт. Свердловск: Ин-т матем. и механ. УНЦ АН СССР. 1985.

3. Kellog R.B.,Shubin G.R., Stephens A.B. uniqueness and the cell Reynolds number//SIAM J. Numer. Analys. 1980. V. 17. N 6.P. 733-739.

4. Osher S. Nonlinear singular perturbation problems and one sided difference schemes// SIAM J. Numer. Analys. 1981. V. 18. N 1. P. 129-144.

5. Vulanovic R. A uniform numerical method for quasilinear singular perturbation problems without turning points// Computing. 1989. N41.P.97-106.

6.Lorenz J.Stability and monotonicity properties of stiff quasilinear boundary problems// Rev. Res. Fac.Sci. Univ. Novi Sad. 1982. V. 12.P. 151-175.

7.Самарский А.А. Теория разностных схем. М.: Наука, 1983.

8. Задорин А. И., Игнатьев В.Н. Численное решение сингулярно возмущенной третьей краевой задачи для обыкновенного уравнения второго порядка//Изв. вузов. Математика. 1986, N 11. С. 20-26.

9. Ортега Д., Рейнболдт В. Итерационные методы решения нелинейных уравнений со многими неизвестными. М.: Мир, 1975.